УДК 620.17

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ХОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

© 2022 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, Н. М. Токарева, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)
ООО «3Д-комплекс» (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ вариационных принципов, применяемых в ходе моделирования объектов в аддитивных технологиях.

Ключевые слова: материал, вариационный принцип, аддитивные технологии.

При создании объектов на базе аддитивных технологий исследователям приходится опираться на различные принципы. Среди них мы можем отметить вариационные принципы. Проведем анализ их ключевых характеристик.

Метод потенциальной энергии относится к вариационным принципам. В нем основная идея состоит в том, что для анализируемых объектов по потенциальной энергии, у которой есть экстремальные свойства.

Учет соответствующих значений потенциальной энергии дает возможности для того, чтобы провести формирование необходимых для расчетов уравнений [1, 2]. Такие уравнения будут построены с меньшими трудностями, если подробным образом осуществить описание потенциальной энергии.

Когда упругий объект будет переводиться в недеформированное состояние из деформированного за счет внешних сил, тогда совершаемая ими работа рассматривается в виде потенциальной энергии.

В ходе исследований подтверждается, что для внешних сил потенциальная энергия всегда будет иметь отрицательные значения. Предположим, что мы рассматриваем объект, который создан на основе аддитивных технологий [3].

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: kozl99daryanik@yandex.ru.
Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, профессор, e-mail: app@vivt.ru.
Токарева Наталия Михайловна – генеральный директор ООО «3Д-комплекс», e-mail: tokkarrew-wa__561@mail.ru.
Шунулина Виктория Владимировна – ВИВТ-АНОО ВО, студент, e-mail: shunul33vvv@yandex.ru.

Этот объект, например, представляет собой прямоугольный параллелепипед, внутри него материал распределен однородным образом.

Предположим, что достигнуто по объекту устойчивое равновесие, а рассматриваемый параллелепипед подвергается в середине длинной стороны действию груза, имеющего вес P. Считаем, что значение наибольшего прогиба параллелепипеда равно s, а x – это та ось параллелепипеда, которая будет изогнутой [4].

Полную потенциальную энергию мы рассматриваем в виде суммы потенциальной энергии L, относящейся к внешним силам и энергии M, которая будет соответствовать внутренним силам. Поэтому справедливо выражение

$$E_{pot} = L(x) + M = \int \frac{R^2}{2WJ} dx - Ps. \qquad (1)$$

Это выражение показывает, как на основе сил будет зависеть энергия, относящаяся к внутренним силам с силами. R соответствует моменту сил.

Можно переписать (1) таким образом:

$$E_{pot} = y^2 Ps - yPs. \qquad (2)$$

Зависимость является квадратической, для нее существует минимальное значение потенциальной энергии при y=1. Эта потенциальная энергия соответствует одной из изогнутых осей [5], которые проходят через концы параллелепипеда. В этом состоят характеристики потенциальной энергии.

При рассмотрении объектов можно ввести понятие возможных перемещений. Они соответствуют бесконечно малым мысленным перемещениям, вследствие того, что на рассматриваемую точку будет действовать равнодействующая сила, которая не равна нулю [6].

Основываясь на указанном понятии, можно говорить о принципе возможных перемещений. Одна из возможных формулировок: по любому из перемещений в какой-то из точек при соблюдении для нее условия равновесия значение полной работы. Весь объект, который предполагается упругим, представляется в виде совокупности связанных точек. Полная работа будет соответствовать сумме всех работ, которые относятся к каждой из точек.

В анализируемых объектах могут возникать механические напряжения. Их описывают на основе тензора напряжений:

$$T_{napryazh} = \begin{pmatrix} \nu_x & \lambda_{yx} & \lambda_{zx} \\ \lambda_{xy} & \nu_y & \lambda_{zy} \\ \lambda_{xz} & \lambda_{yz} & \nu_z \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Когда рассматривается тензор деформаций, то его представляют следующим образом:

$$T_{deform} = \begin{pmatrix} \chi_x & \beta_{yx} & \beta_{zx} \\ \beta_{xy} & \chi_y & \beta_{zy} \\ \beta_{xz} & \beta_{yz} & \chi_z \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Будем считать, что краевые поверхностные силы воздействуют на наш исследуемый объект, который находится в некотором первичном состоянии. Но направлены по трем главным осям: $\overline{X}dS, \overline{Y}dS, \overline{Z}dS$.

Действие их происходит на любой из элементов поверхностей dS. Также существуют объемные силы $Xd\lambda, Yd\lambda, Zd\lambda$. Действие их происходит на любой из элементов объема $d\lambda$.

Вследствие того, что воздействует внешняя нагрузка, рассматриваемый объект осуществил перемещения p_x, p_y, p_z и будет находиться в состоянии равновесия. Вариации внешних сил, относящихся к действительному состоянию, будут определять значения объемных и поверхностных внешних сил. Это соответствует фиктивному состоянию рассматриваемого нами объекта.

В таком случае, если анализировать вариации по перемещениям и напряжениям, соответствующим первому состоянию, тогда они будут соответствовать перемещениям и напряжениям, которые будут наблюдаться во втором состоянии.

За счет использования принципа возможных перемещений [7, 8] к первому из состояний нашего упругого анализируемого объекта, мы приходим к следующему выражению.

$$\delta(\iiint L(x)d\lambda - \iint(\overline{X}p_x + \overline{Y}p_y + \overline{Z}p_z)dS -$$
$$- \iiint(\overline{X}p_x + \overline{Y}p_y + \overline{Z}p_z)d\lambda) =$$
$$= \delta E_{pot}(p_x, p_y, p_z) = 0 \qquad (5)$$

В нем видно, что для состояния равновесия по анализируемому объекту полная потенциальная энергия будет соответствовать тому выражению, которое находится внутри скобок. Экстремальное значение для потенциальной энергии E_{pot} для состояния равновесия, будет вытекать из того, что первая вариация равна нулю.

Минимальное значение потенциальной энергии мы можем обосновать тем, что при взятии другой вариации E_{pot} она окажется положительной.

Тогда выражение (5) будет соответствовать принципу Лагранжа. Его называют вариационным уравнением Лагранжа. Идея уравнения состоит в том, что минимальное значение для потенциальной энергии упругого анализируемого объекта будут обеспечивать действительно имеющие место перемещения, среди всех возможных систем перемещений.

Теперь применим принцип возможных перемещений для второго из состояний нашего упругого анализируемого объекта, которое является фиктивным. Мы приходим к следующему выражению.

$$\delta(\iiint L_0(x)d\lambda - \iint(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})dS -$$
$$- \iiint(\overline{X}p_x + \overline{Y}p_y + \overline{Z}p_z)d\lambda) =$$
$$= \delta E_{pot}(T_{napryazh}) = 0 \qquad (6)$$

Если положить для объемных сил вариации равными нулю, когда рассматривается фиктивное состояние, тогда

$$\delta(\iiint L_0(x)d\lambda - \iint(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})dS -$$
$$- \iiint(\overline{X}p_x + \overline{Y}p_y + \overline{Z}p_z)d\lambda) =$$
$$= \delta E_{pots}(T_{napryazh}) = 0 \qquad (7)$$

Это уравнение называется вариационным уравнением Кастильяно [9].

Основная идея принципа Гамильтона [3] состоит в том, что движение нашего объекта рассматривается на некотором временном интервале и значение определенного интеграла в рамках этого промежутка от разницы кинетической и потенциальной энергии будет принимать экстремальное значение.

В принципе Дирихле [3] при неустойчивом равновесии объекта будем наблюдать максимум по потенциальной энергии. Наоборот, если равновесие объекта ус будем наблюдать минимум по потенциальной энергии. Наблюдаются нулевые затраты по энергии при безразличном равновесии.

Таким образом, при решении задач, связанных с оценкой характеристик движения упругих объектов полученных на базе аддитивных технологий, их устойчивости, исследователи имеют возможности для использования различных вариационных принципов.

СПИСЛК ИСТОЧНИКОВ

1. Абовский Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга; под ред. Н. П. Абовского. – М.: Наука, 1978. – 228 с.

2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

3. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М.: Наука, 1983. – 448 с.

4. Григолюк Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука, 1988. – 232 с.

5. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек / В. В. Карпов. – СПб.: СПбГАСУ, 2006. - 330 с

6. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

7. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А.А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

8. Аблаев Р. Р. Анализ остаточных деформаций в элементах кузова легкового автомобиля методом прямого интегрирования / Р. Р. Аблаев, А. Р. Аблаев, Л. С. Абрамова, В. А. Ксенофонтова // International Journal of Advanced Studies. – 2020. – Т. 10. – № 1. – С. 35-49.

9. Биргер И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М.: Издательство «Наука». – 560 с.

VARIATIONAL PRINCIPLES APPLIED IN THE COURSE OF OBJECT MODELING IN ADDITIVE TECHNOLOGIES

© 2022 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, N. M. Tokareva, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)
LLC «3D complex» (Voronezh, Russia)

The article analyzes the variational principles used in the modeling of objects in additive technologies.

Keywords: material, variational principle, additive technologies.