УДК517.95

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДАМИ РИТЦА И КАНТОРОВИЧА

©2022 Ю. В. Гарбузова, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

В этой статье рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения методами Ритца и Канторовича. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, нагруженные уравнения, разностная схема, псевдопараболическое уравнение, уравнение влагопереноса, уравнение Аллера, дробная производная Капуто.

В конечной области G ограниченной кусочно-гладким контуром Г задано уравнение

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu = f, \quad (1)$$

где p – положительная непрерывно дифференцируемая в области G+Г функция, а q и f -непрерывные в G+Г функции, при этом $q \geq 0$. Рассмотрим следующие краевые задачи:

Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее на границе Г одному из следующих трех краевых условий:

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{du}{dn} + \sigma u\right]_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

(σ — непрерывная неотрицательная функция, не равная тождественно нулю, n – внешняя нормаль);

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Мы рассматриваем нулевые краевые условия, так как общий случай может быть сведен к рассматриваемому, если в G+Г можно найти какую-нибудь достаточно гладкую функцию u_1, удовлетворяющую ненулевым заданным условиям и вместо функции и искать функцию $v = u - u_1$. Такая замена приведет нас к краевой задаче для уравнения, отличающегося от уравнения (1) только правой частью, но уже с нулевыми начальными условиями.

Рассмотрим гильбертово пространство L_2(G) действительных функций, интегрируемых с квадратом в области G в котором скалярное произведение определено равенством

$$(\varphi, \psi) = \int_G\int \varphi\psi\, dx\, dy. \quad (5)$$

В этом пространстве выделим три множества функций M, M_σ и M_0 элементами которых являются дважды непрерывно дифференцируемые функции в G+Г удовлетворяющие соответственно краевым условиям (2), (3) или (4). Покажем, что оператор Lu положителен на множествах M, M_σ а также и на множестве M_0 если в последнем случае $q(x; y) \neq 0$.

Гарбузова Юлия Владимировна – Воронежский государственный университет, аспирант, e-mail: 9999vlad9999@mail.ru.
Шабров Сергей Александрович – Воронежский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, доцент.

Все рассуждения, показывающие эквивалентность схем, в данном случае сохраняют силу. Схема имеет на решении аппроксимацию, если, кроме условий. Одним из важнейших практических методов для построения минимизирующих последовательностей является метод, предложенный в 1908 году Вальтером Ритца. Состоит он в следующем. Вычисляется *n*-ое приближение к минимизируемой функции в виде

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$$

то есть значения функционала рассматривается не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях с постоянными коэффициентами, составленных из *n* первых функций некоторой выбранной последовательности функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x)$$

Данные функции часто называют координатными или базисными.

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

На линейных комбинациях функционал превращается в функцию коэффициентов. Эти коэффициенты выбираются так, чтобы функция достигала экстремума; следовательно, должны быть определены из условий стационарности, то есть из системы

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$J[\tilde{\varphi}]\,\tilde{\varphi}$$

Получающаяся в результате последовательность функций сходится к минимуму по функционалу. Заканчивая процесс вычислений, получают значение, приближённо равное глобальному минимуму (при этом сама функция может сильно отличаться от оптимальной).

$$\{\varphi_n\} 1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

$$\sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(nx), \dots$$

На практике последовательность обычно строят с помощью системы многочленов или системы тригонометрических функций. Обе системы являются полными в пространстве непрерывных функций.

Практическое применение метода Ритца для решения вариационных задач

Имеем линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d\varphi}{dx}\right) - 2\varphi = -1 - \ln(x^2)$$

Граничные условия, которого:

a) $\varphi'(1) = 0, \ \varphi(2) = 1$

b) $\varphi\,(1) = 0, \ \varphi(2) + \varphi'(2) = 1$

Решая исходное линейное дифференциальное уравнение

$$x^2\varphi'' + 2\,x\,\varphi' - 2\,\varphi = \, -\ln(x^2) - 1$$

Получим общее решение дифференциального уравнения в виде:

$$\bar{\bar{\varphi}}(x) = \frac{c_2}{x^2} + c_1 x + \frac{\ln(x^2)}{2} + 1$$

$$\bar{\bar{\varphi}}'(x) = -\frac{2\,c_2}{x^3} + c_1 + \frac{1}{x}$$

Пользуясь граничными условиями составим системы уравнений, из которых определим неизвестные коэффициенты.

$$\varphi'(1) = 0 \quad \varphi(2) = 1$$

$$C_1 = -\frac{1}{17} - \frac{8}{17}\ln(2)$$

$$C_2 = \frac{8}{17} - \frac{4}{17}\ln(2)$$

$$C_1 = -0.385010437910562$$

$$C_2 = 0.307494781044718 \quad \varphi(1) = 0$$

$$\varphi(2) + \varphi'(2) = 1 \quad C_1 = -\frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{6}$$

$$C_2 = \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{5}{6}$$

$$C_1 = -0.397715726853315$$

$$C_2 = -0.602284273146684$$

Исходные функции принимают вид

$$a)\ \bar{\bar{\varphi}}(x) = \frac{0.307494781044718}{x^2} - $$
$$- 0.385010437910562x + \frac{\ln(x^2)}{2} + 1$$
$$b)\ \bar{\bar{\varphi}}(x) = -\frac{0.602284273146684}{x^2} - $$
$$- 0.397715726853315x + \frac{\ln(x^2)}{2} + 1$$

Данные кривые будут единственными кривыми возможного экстремума функционала с данными граничными условиями

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А. Н. Однородные разностные схемы / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 1. С. 4-63.

2. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения / А. А. Самарский // Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, 1958 г.) Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, С. 148-160.

3. Тихонов А. Н. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1960. – 131. – № 3. – С. 514-517.

4. Самарский А. А. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа / А. А. Самарский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 3. – С. 441-460.

5. Самарский А. А. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами / А. А. Самарский, И. В. Фрязинов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 5.

6. Lees M. Approximat e solutions of parabolic equations / M. Lees // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1959. – 7. – № 2. – С. 167-183.

A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM

© 2022 U. V. Garbuzova, S. A. Shabrov

Voronezh State University (Voronezh, Russia)

In this paper, we consider a boundary value problem for an elliptic equation by the methods of Ritz and Kantorovich. By the method of energy inequalities, a priori estimates of solutions to the problems under consideration in differential and difference interpretations are derived. The obtained a priori estimates imply uniqueness, stability of the solution according to the initial data and the right side, as well as convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at a rate equal to the order of approximation error.

Keywords: boundary value problems, a priori estimation, loaded equations, difference scheme, pseudo-parabolic equation, moisture transfer equation, Aller equation, Caputo fractional derivative.