УДК517.95

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВИДА

***©2022 В. В. Гарбузов, С. А. Шабров***

*Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)*
*Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)*

*В этой статье рассматривается краевая задача для уравнения элептического вида, которая далее используется для доказательства устойчивости разностной модели, построенной для этой краевой задачи. Построены разностные схемы для дифференциальных задач. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.*

*Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, нагруженные уравнения, разностная схема, псевдопараболическое уравнение, задача для уравнения эллиптического вида.*

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(pgradu) - qu + F(x,t) \qquad (1)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div(pgradu) - qu + F(x,t) \qquad (2)$$

описывает процессы диффузии уравнение

$$-div(pgradu) + qu = F(x,t) \qquad (3)$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Краевая задача для уравнения (3) (эллиптический тип) состоит в нахождении функции u(x) класса удовлетворяющей, в области $G \in R^n$ уравнению (3) и граничному условию вида

$$\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = v \qquad (4)$$

Выделяют следующие типы граничных условий (4):

граничное условие первого рода

$$u\big|_{\partial\Omega} = u_0 \qquad (5)$$

граничное условие второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = u_1 \qquad (6)$$

граничное условие третьего рода

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = u_2 \qquad (7)$$

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами первого, второго и третьего рода.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача первого рода называется задачей Дирихле, краевая задача второго рода называется задачей Неймана. Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (3) и во внешности ограниченной области $G \in R^n$ (внешние краевые задачи). Отличие состоит в том, что помимо граничного условия (4) на задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть: условия излучения Зоммерфельда для уравнения Гельмгольца; условия вида

$$u(x)=0,\ x>0 \qquad (10)$$

Гарбузов Владислав Владимирович – Воронежский институт высоких технологий, преподаватель, e-mail: 9999vlad9999@mail.ru.
Шабров Сергей Александрович – Воронежский государственный университет, доктор физ.-мат. наук, доцент.

для уравнения Пуассона, которое является примером системы, близкой к фрактальной. Одной из наиболее важных характеристик почв, влияющих практически на все свойства почвы, является их влажность. Зависимость фрактальной размерности Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y);$$

или уравнение Лапласа, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, которое получается из уравнения Пуассона при $f(x, t) = 0$. Здесь функция $u(x, t)$ может иметь различный физический смысл, например, описывать стационарное, независящее от времени распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряжённостей электрического и магнитного полей, распределение потенциала поля тяготения и т. п.

**Первая краевая задача**. Если на границе $\mathbf{\Gamma}$ расчётной области $\overline{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Gamma}$ (в данном случае расчетная область $\overline{\mathbf{\Omega}}$ – это сама область $\mathbf{\Omega}$, включая её границу $\mathbf{\Gamma}$) задана искомая функция, то соответствующая первая краевая задача для уравнения Лапласа или Пуассона называется задачей Дирихле:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{\Omega};\\ u(x,y)\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{\Gamma}.\end{cases}$$

**Вторая краевая задача**. Если на границе $\mathbf{\Gamma}$ расчетной области $\overline{\mathbf{\Omega}}$ задаётся ***нормальная производная*** искомой функции, то соответствующая вторая краевая задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа или Пуассона:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{\Omega};\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in\mathbf{\Gamma}.\end{cases}$$

здесь $n$ – направление внешней к границе $\mathbf{\Gamma}$ нормали. Иногда краевое условие записывают в более удобном виде:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cos(\widehat{n,i})+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cos(\widehat{n,j})=\varphi(x,y),$$

где $\cos(\widehat{n,i})$, $\cos(\widehat{n,j})$ – направляющие косинусы внешнего вектора единичной нормали к границе $\mathbf{\Gamma}$, $i$ и $j$ орты базисных векторов.

**Третья краевая задача** для уравнения Пуассона (Лапласа) имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), (x,y)\in\mathbf{\Omega};\\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}+\alpha u(x,y)\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y), (x,y)\in\mathbf{\Gamma}.\end{cases}$$

**Замечание**. Следует отметить, что в вышеперечисленных постановках задач математической физики число **начальных условий равно порядку дифференциального уравнения по времени**, а старший порядок производной по времени в начальных условиях на единицу меньше порядка дифференциального уравнения по времени.

Старший порядок производной по пространственной переменной в краевых условиях равен порядку дифференциального уравнения по пространственной переменной минус единица.

В одномерных задачах с одной пространственной переменной количество граничных условий точно равно порядку дифференциального уравнения по пространственной переменной.

Количество краевых условий для многомерных задач не ограничено, поскольку на разных участках границы могут быть заданы граничные условия различного рода.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А. Н. Однородные разностные схемы / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 1. – С. 4-63.

2. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения / А. А. Самарский // Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, 1958 г.) Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148-160.

3. Тихонов А. Н. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности

/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский //Докл. АН СССР. – 1960. – 131. – № 3. – С. 514-517.
4. Самарский А. А. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа / А. А. Самарский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 3. – С. 441-460.
5. Самарский А. А. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами / А. А. Самарский, И. В. Фрязинов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 5.
6. Lees M. Approximat e solutions of parabolic equationsM.Lees // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1959. – 7. – № 2. – 167-183.

## A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM

***© 2022 V. V. Garbuzov, S. A. Shabrov***

*Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)*
*Voronezh State University (Voronezh, Russia)*

*In this paper, we consider a boundary value problem for an elliptic equation, which is then used to prove the stability of a difference model constructed for this boundary value problem. Difference schemes for differential problems are constructed. By the method of energy inequalities, a priori estimates of solutions to the problems under consideration in differential and difference interpretations are derived. The obtained a priori estimates imply uniqueness, stability of the solution according to the initial data and the right side, as well as convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at a rate equal to the order of approximation error.*

*Keywords: boundary value problems, a priori estimation, loaded equations, difference scheme, pseudo-parabolic equation, problem for an elliptic equation.*