

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

© 2023 В. В. Шунулина, Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ характеристик колебаний физического или математического маятника. Продемонстрировано решение дифференциального уравнения. Задача решена в первом приближении. Показано, как зависит частота колебаний от амплитуды в методе последовательных приближений. Исследована зависимость координаты маятника от амплитуды. Показано, в каком случае решение будет справедливым.

Ключевые слова: колебания, математический маятник, физический маятник, движение, период.

Большая часть механических движений связана с движением периодическим образом функционирующих машин, требуется учитывать различные вибрации. Следует отметить, что во многих учебниках не всегда подробным образом рассматриваются характеристики колебаний.

Если рассматривается математический или физический маятник [1, 2], то во многих случаях для свободных колебаний может использоваться следующее уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0. \quad (1)$$

Будем использовать в ходе его решения метод последовательных приближений. Представим функцию  $\sin x$  в виде разложения в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (2)$$

При подстановке в уравнение (1) учтем только первые 2 члена, полагая, что  $x \ll 1$ . Уравнение (1) запишем в следующем виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0. \quad (3)$$

Введем обозначение  $\alpha = -1/6$ . Тогда уравнение будет записано таким образом

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0 \quad (4)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде разложения в ряд по степеням  $\alpha$

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots \quad (5)$$

В этом разложении  $x_0$  рассматривается в виде решения в «нулевом» приближении [3], когда  $\alpha=0$ ,  $x_1$  считается решением в «первом» приближении и т.д. Например, при учете  $x_0$  уравнение представляется так

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0. \quad (6)$$

При этом  $\omega_0$  будет связано с  $\omega$ , поскольку не будет соблюдаться условие изохронности. То есть, колебания будут зависеть от амплитуды колебаний маятника. Частоту [4] представляем в виде следующего разложения

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \gamma_1 + \alpha^2 \cdot \gamma_2 + \dots \quad (7)$$

Если использовать «первое» приближение, тогда считаем, что

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \gamma_1. \quad (8)$$

Подставляя  $\omega_0$ , получим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \alpha \gamma_1 x + \omega^2 \alpha x^3 = 0. \quad (9)$$

Если рассматривать уравнение на  $x_0$  в «нулевом» приближении, тогда запишем

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0. \quad (10)$$

Решение такого уравнения запишется в виде

$$x_0 = A \cos \omega t. \quad (11)$$

Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: [shunul33vvv@yandex.ru](mailto:shunul33vvv@yandex.ru).

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, доктор техн. наук, профессор, e-mail: [app@vvt.ru](mailto:app@vvt.ru).

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: [kozl99daryanik@yandex.ru](mailto:kozl99daryanik@yandex.ru).

Рассмотрим уравнение для «первого» приближения путем подстановки  $x = x_0 + \alpha x_1$ . Если учитывать лишь слагаемые с первой степенью относительно  $\alpha$ , тогда

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \gamma_1 A \cos \omega t - \omega^2 A^3 \cos^3 \omega t. \quad (12)$$

Преобразуя тригонометрическое выражение, получаем

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \gamma_1 A \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega^2 A^3 \cos 3\omega t - \frac{3}{4} \omega^2 A^3 \cos \omega t \quad (13)$$

Необходимо избавиться от решения, которое соответствует члену, содержащему  $t \cdot \sin \omega t$ . В таком случае положим

$$\gamma_1 A - \frac{3}{4} \omega^2 A^3 = 0. \quad (14)$$

Значение частоты получается таким образом

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{8} A^2}. \quad (15)$$

Если  $\omega_0 = 1=1$ , тогда приведем график зависимости  $\omega$  от  $A$  на рисунке 1.

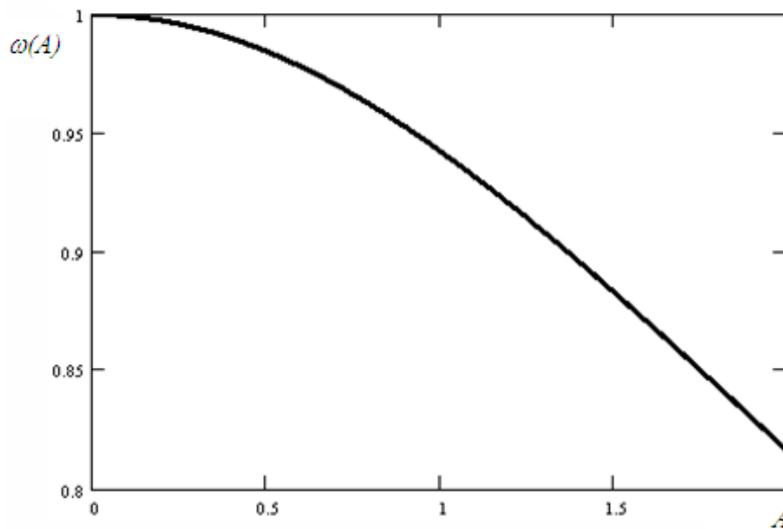


Рисунок 1. Иллюстрация зависимости  $\omega(A)$

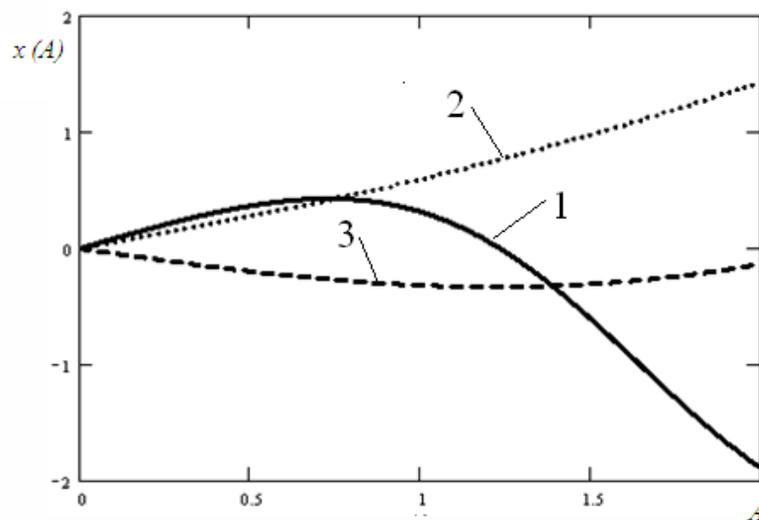


Рисунок 2. Иллюстрация зависимости  $x(A)$ , кривая 1 –  $t = 0$ ; кривая 2 –  $t = 1$  с; кривая 3 –  $t = 2$  с.

Перепишем уравнение для «первого» приближения в таком виде:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4} \omega^2 A^3 \cos 3\omega t. \quad (16)$$

Его решение необходимо искать в следующем представлении

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A^2}{32} \cdot \cos 3\omega t. \quad (17)$$

Первые два слагаемых будут соответствовать решению однородного уравнения, третье слагаемое будет соответствовать частному решению неоднородного уравнения.

Полное решение мы записываем в таком виде

$$x = A \cos \omega t + \alpha (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A^2}{32} \cdot \cos 3\omega t). \quad (18)$$

С учетом начальных условий  $x(0) = A$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  получаем

$$x = A(1 + \frac{A^2}{192}) \cos \omega t - \frac{A^3}{192} \cdot \cos 3\omega t. \quad (19)$$

График зависимости  $x(A)$  приведен на рисунке 2. Решение справедливо при условии, что  $\sin x - x + x^3 / 6 = 0$ .

В итоге колебания будут неизохронными, а также будут содержать гармоники.

Анализ показал, что в результате расчетов погрешность не будет превосходить нескольких процентов.

Вывод. Полученные результаты представляют интерес с точки зрения практики. Использование первого приближения дает возможности для того, чтобы получать результаты с приемлемой погрешностью.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин // М.: Наука, 1981. – 568 с.

4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков // М.: Наука, 1984. – 432 с.

5. Клименко Ю. А., Адаптивная система управления для устранения несимметричности нагрузки фаз в трёхфазной сети 0,4 кв / Ю. А. Клименко, А. П. Преображенский, О. Н. Чопоров // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 4 (27). – С. 9-10.

6. Моделирование и экспериментальная проверка процессов разделения биоклеток по величине магнитной восприимчивости / В. Н. Павлов [и др.] // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 1 (36). – Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=1067> (дата обращения: 10.09.2022).

## THE INVESTIGATION OF OSCILLATIONS OF THE PENDULUM

© 2023 V. V. Shunulina, A. P. Preobrazhenskiy, D. N. Kozlova

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)

*The paper analyzes the characteristics of oscillations of a physical or mathematical pendulum. The solution of the differential equation is demonstrated. The problem is solved in the first approximation. It is shown how the oscillation frequency depends on the amplitude in the method of successive approximations. The dependence of the pendulum coordinate on the amplitude is studied. shows in which case the decision will be fair.*

*Keywords: oscillations, mathematical pendulum, physical pendulum, motion, period.*