

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

© 2023 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ характеристик вынужденных колебаний в механической системе. Рассмотрено решение дифференциального уравнения при соответствующих начальных условиях. Проанализировано, каким образом будет происходить рост амплитуды по колебаниям в случае резонанса. Приведены зависимости координаты от времени при различных соотношениях между частотами.

Ключевые слова: вынужденные колебания, механическая система, период.

Механические колебания и волны являются одними из распространенных в природе. Во многих случаях обычные расчеты сложных механических устройств, если есть вынужденные синусоидальные колебания, как правило, рассматриваются в виде достаточно непростой задачи. В этой связи представляет интерес на практике провести анализ установившихся режимов колебаний.

Рассмотрим особенности вынужденных колебаний в линейной механической системе.

Если учитывать трение, то уравнение запишется в следующем виде

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

где  $m$  – масса движущегося объекта [1];

$k$  – коэффициент жесткости пружины,

$r$  – коэффициент сопротивления,

$F_0$  – амплитуда воздействия внешней силы

Проведем нормировку уравнения (1), поделив все слагаемые на  $m$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

В уравнении введены обозначения:  $\omega_0$  – частота собственных колебаний, которые являются незатухающими,  $r/(2m)$  – коэффициент затухания. Амплитуда –  $F_0/m$ .

Если пренебречь затуханием, то есть, положить  $\beta = 0$ , тогда для него [2] может быть общее решение записано в таком виде

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t + A \cos \omega t. \quad (3)$$

На рисунке 1 приведены примеры зависимости координаты колеблющегося объекта  $x(t)$  при различных соотношениях между частотами.

В (3) по однородному уравнению (если  $f_0 = 0$ ) первые два слагаемых дают решение. На основе третьего слагаемого получается частное решение для неоднородного уравнения. Анализ показывает, что

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4)$$

Предположим, что в начальных условиях для начального момента времени  $t = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . После этого  $a = -A$ ,  $b = 0$ . Чтобы описать особенности движения рассматриваемого нами неавтономного осциллятора, необходимо применить функцию

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (5)$$

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: [koz199dary-anik@yandex.ru](mailto:koz199dary-anik@yandex.ru).

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, доктор техн. наук, профессор, e-mail: [app@vvt.ru](mailto:app@vvt.ru).

Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: [shunul33vvv@yandex.ru](mailto:shunul33vvv@yandex.ru).

На рисунке 2 приведены примеры зависимости  $x(t)$  при различных соотношениях между частотами.

В случае близости частот  $\omega_0$  и  $\omega$  между собой, будут возникать биения, которые соответствуют частоте  $|\omega - \omega_0|$ . По мере того, как будет приближение к резонансу, можно увидеть неограниченное уменьшение такой частоты [3]. Биения будут становиться все более редкими и глубокими, а амплитуда будет неограниченным образом увеличиваться [4].

Проанализируем, каким образом будет осуществляться при резонансе рост амплитуды для колебаний

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega). \quad (6)$$

Тогда, проводя преобразования, получим

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} \frac{\sin((\omega_0 - \omega)t/2)}{(\omega_0 - \omega)t/2} t \sin \omega_0 t. \quad (7)$$

На рисунке 3 приведены примеры зависимости  $x(t)$  при различных соотношениях между частотами.

Если будет точным образом соблюдаться резонанс ( $\omega = \omega_0$ ), тогда

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (8)$$

На каждом периоде рост амплитуды будет составлять  $(x(t + 2\pi) - x(t))/x(t)$ .

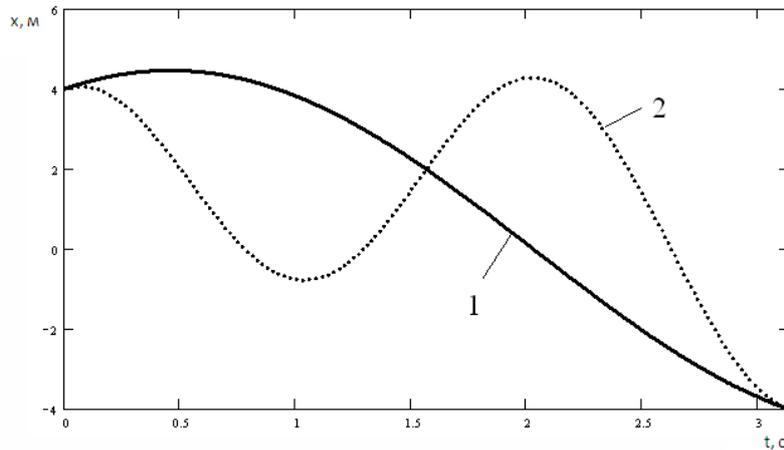


Рисунок 1. Иллюстрация зависимости  $x(t)$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $A = 3$ ,  $\omega_0 = 1$ , кривая 1 –  $\omega = 2$ ; кривая 2 –  $\omega = 6$ .

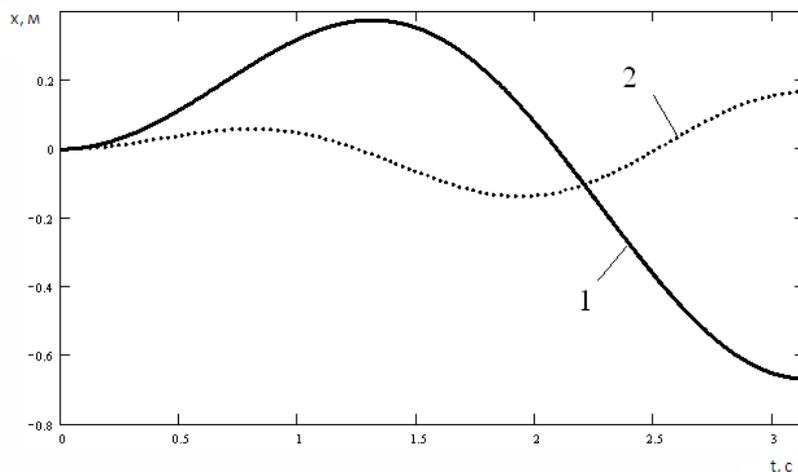


Рисунок 2. Иллюстрация зависимости  $x(t)$ ,  $f_0 = 1$ ,  $\omega = 2$ , кривая 1 –  $\omega_0 = 1$ ; кривая 2 –  $\omega_0 = 4$ .

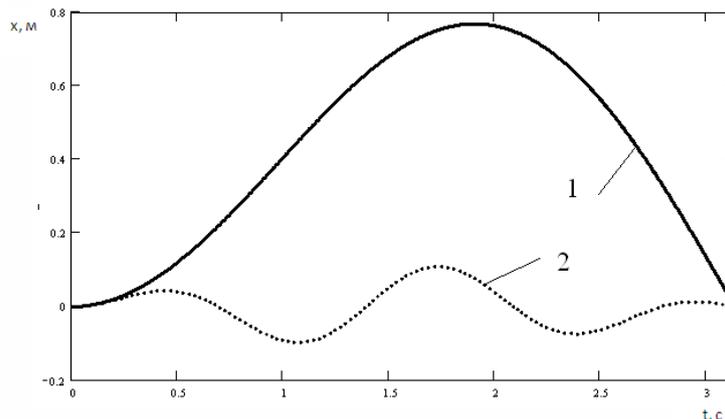


Рисунок 3. Иллюстрация зависимости  $x(t)$ ,  $f_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ , кривая 1 –  $\omega = 2$ ; кривая 2 –  $\omega = 10$ .

Вынужденные колебания можно встретить достаточно часто на практике в механических системах. Проведено моделирование для различных режимов колебаний, приведены иллюстрации зависимости координат от времени.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин // М.: Наука, 1981. – 568 с.

4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков // М.: Наука, 1984. – 432 с.

5. Исследование процессов в установке для модификации биологических клеток магнитным полем при использовании источника переменного тока с высоким выходным сопротивлением / В. Н. Павлов [и др.] // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 1 (36). – Доступно по:

<https://moitvvt.ru/journal/article?id=1074> (дата обращения: 10.09.2022).

6. Клименко Ю. А. Адаптивная система управления для устранения несимметричности нагрузки фаз в трёхфазной сети 0,4 кв. / Ю. А. Клименко, А. П. Преображенский, О. Н. Чопоров // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 4 (27). – С. 9-10.

7. Моделирование и экспериментальная проверка процессов разделения биоклеток по величине магнитной восприимчивости / В. Н. Павлов [и др.] // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 1 (36). – Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=1067> (дата обращения: 10.09.2022).

#### THE STUDY OF FORCED OSCILLATIONS IN THE MECHANICAL SYSTEM

© 2023 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)

*The paper analyzes the characteristics of forced oscillations in a mechanical system. The solution of the differential equation is considered under appropriate initial conditions. It is analyzed how the amplitude will increase with respect to oscillations in the case of resonance. The dependences of the coordinate on time are given for various ratios between frequencies.*

*Keywords: forced vibrations, mechanical system, period.*