

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ КОНТУРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

© 2023 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

*В статье дается анализ характеристик колебаний контура, содержащего нелинейный элемент. Показана возможность возникновения затухающих колебаний. Показано, каким образом будет решаться дифференциальное уравнение. Решение осуществляется в первом приближении. Приведена иллюстрация зависимости заряда от времени с учетом заданных начальных условий.*

*Ключевые слова:* колебания, колебательный контур, нелинейный элемент, период.

Простейшей электрической схемой, в которой могут возбуждаться колебания, является колебательный контур, он входит в состав различных радиоэлектронных схем. В такой цепи колебания будут свободными и затухающими [1, 2].

Проведем анализ колебательного контура с нелинейным элементом (рис. 1).

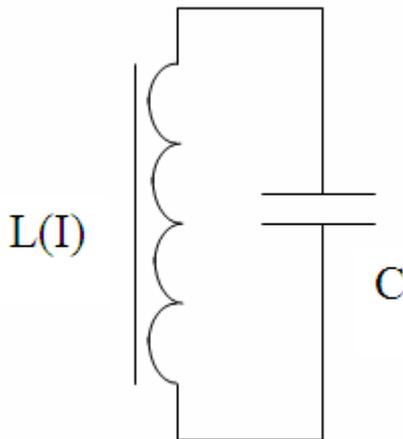


Рисунок 1. Иллюстрация колебательного контура с нелинейным элементом

Для него мы можем записать закон Ома

$$\frac{d\Phi(I)}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (1)$$

Можно представить уравнение в следующем виде

$$\frac{d\Phi}{dt} \dot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (2)$$

В некоторой области значений есть возможности для аппроксимации полиномиальной зависимостью кривой намагничивания

$$\Phi(I) = L_0(I - \chi I^3). \quad (3)$$

В указанном выражении  $\chi \ll 1$  является коэффициентом нелинейности. Если выражение (2) умножить на  $dq$  и провести интегрирование, то можно получить совокупность интегральных кривых [3], которые близки к эллипсам и рассматриваются на фазовой плоскости  $(q, \dot{q})$

$$L_0 \dot{q}^2 - \frac{3}{2} \chi L_0 \dot{q}^4 + \frac{1}{C} q^2 = \text{const}. \quad (4)$$

Перепишем уравнение (2) следующим образом

$$\ddot{q}(L_0 - 3L_0\chi \dot{q}^2) + \frac{q}{C} = 0. \quad (5)$$

С учетом переобозначений

$$\ddot{q} - 3L\chi \dot{q}^2 \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6)$$

В указанном выражении  $\omega_0^2 = 1/(L_0 C)$ .

Используем разложение в ряд

$$q = x = x_0 + \chi x_1 + \chi^2 x_2 + \dots \quad (7)$$

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: [kozl99daryanik@yandex.ru](mailto:kozl99daryanik@yandex.ru).

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, доктор техн. наук, профессор, e-mail: [app@vivt.ru](mailto:app@vivt.ru).

Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: [shunul33vvv@yandex.ru](mailto:shunul33vvv@yandex.ru).

Будем использовать только два первых члена в таком разложении  $q = x = x_0 + \chi x_1$ . Предполагаем, что к частоте вследствие нелинейности можно ввести поправку

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \chi \lambda. \quad (8)$$

Выражение (6) может быть переписано таким образом

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \chi \ddot{x}_1 - 3\chi(\dot{x}_0 + \chi \dot{x}_1)^2 (\ddot{x}_0 + \chi \ddot{x}_1) + \\ + (\omega^2 - \chi \lambda)(x_0 + \chi x_1) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При учете только членов с первым порядком малости [4] мы можем переписать выражение в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + \\ + \chi(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \lambda x_0 - 3\dot{x}_0^2 \dot{x}_0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Если рассматривать нулевое приближение ( $\chi = 0$ ), то уравнение запишется в таком виде

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0. \quad (11)$$

Предположим, что начальные условия, следующие  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $x_0 = a \cos \omega t$ . После этого, проведя преобразования, получим выражение

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (\lambda a - \frac{3}{4} a^3 \omega^4) \cos \omega t - \\ - \frac{3}{4} a^3 \omega^4 \cos 3\omega t. \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы избавиться от секулярного члена необходимо выполнение такого равенства

$$\lambda a - \frac{3}{4} a^3 \omega^4 = 0. \quad (13)$$

Тогда получаем

$$\lambda a = \frac{3}{4} a^3 \omega^4. \quad (14)$$

Приходим к выражению для частоты

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \chi a^2 \omega^4 = \\ = \omega_0^2 (1 + \frac{3}{4} \chi a^2 \omega^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда, с учетом (13) придем к уравнению в первом приближении

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{3}{4} a^3 \omega^4 \cos 3\omega t. \quad (16)$$

Полное решение с учетом того, что учитываются начальные условия, представляется в виде

$$\begin{aligned} q = x = a(1 + \frac{3}{32} \chi a^3 \omega^2) \cos \omega t - \\ - \frac{3}{32} \chi a^3 \omega^2 \cos 3\omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

На рисунке 2 приведена зависимость  $x(t)$ . То есть, показана иллюстрация, как меняется заряд на конденсаторе в зависимости от времени. Видно, что по мере увеличения частоты наблюдается рост в амплитуде колебаний заряда.

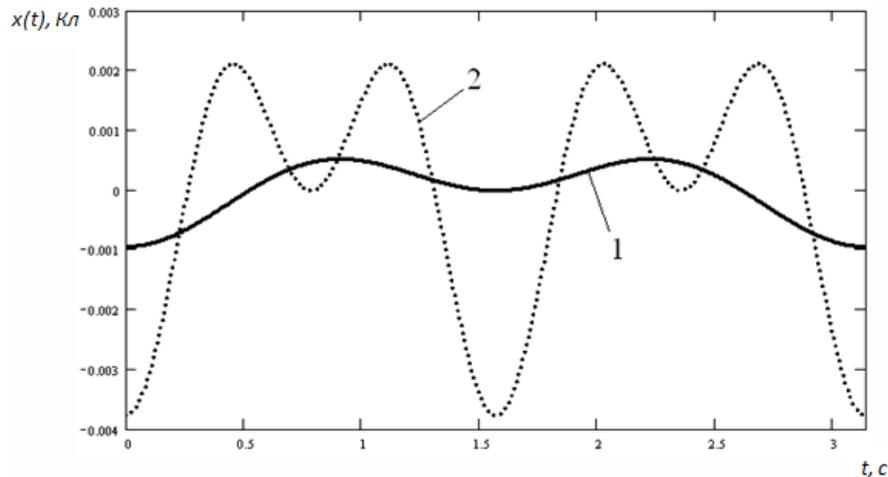


Рисунок 2. Иллюстрация зависимости  $x(t)$ ,  $a=1$ ,  $\chi=0.01$ , кривая 1 –  $\omega=1$ ; кривая 2 –  $\omega=2$ .

Вывод. Данная работа представляет интерес в связи с тем, что нелинейный колебательный контур входит в состав различных электронных устройств. Получены результаты для различных условий работы контура.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин // М.: Наука, 1981. – 568 с.

4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков // М.: Наука, 1984. – 432 с.

5. Львович Я. Е. Оптимизация проектирования многоаспектной цифровой среды системы однородных объектов на основе процедур декомпозиции и агрегации / Я. Е. Львович, А. В. Питолин, С. О. Сорокин // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 2 (25). – С. 186-195.

6. Клименко Ю. А. Адаптивная система управления для устранения несимметричности нагрузки фаз в трёхфазной сети 0,4 кв. / Ю. А. Клименко, А. П. Преображенский, О. Н. Чопоров // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 4 (27). – С. 9-10.

7. Моделирование и экспериментальная проверка процессов разделения биоклеток по величине магнитной восприимчивости / В. Н. Павлов [и др.] // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 1 (36). – Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=1067> (дата обращения: 10.09.2022).

## THE STUDY OF DAMPING OSCILLATIONS OF A LOOP WITH A NONLINEAR ELEMENT

© 2023 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

*Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)*

*The paper analyzes the oscillation characteristics of a circuit containing a nonlinear element. The possibility of occurrence of damped oscillations is shown. It is shown how the differential equation will be solved. The solution is carried out in the first approximation. An illustration of the dependence of the charge on time is given, taking into account the given initial conditions.*

*Keywords: oscillations, oscillatory circuit, nonlinear element, period.*