

## АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

© 2022 Ю. А. Клименко, А. П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

*В статье обсуждаются некоторые проблемы, которые связаны с моделированием процессов переноса. Рассмотрены основные методы, на основе которых могут решаться соответствующие классы задач. Обсуждаются их достоинства и недостатки. Отмечается необходимость учета в ходе рассмотрения краевых условий. Показано, что требуется обеспечение устойчивости получаемых решений.*

*Ключевые слова: моделирование, процесс переноса, метод.*

Рассмотрение различных работ, посвященных исследованию краевых задач, показывает, что только для относительно простых ситуаций существуют возможности для получения точных аналитических решений. Тогда не рассматривается изменчивость в свойствах, не анализируются краевые условия, не оцениваются характеристики нелинейности и др.

В этой связи исследуемые модели будут отклоняться от тех процессов, которые протекают внутри технических устройств. С точными решениями связаны достаточно сложные функциональные ряды [1].

Они, если времена являются малыми, плохо сходятся. С точки зрения инженерных расчетов подобные решения трудно применять.

Это особенно видно для примеров различных прикладных задач теплопроводности, в которых привлекаются обратные задачи, задачи управления, термоупругости и др. В этой связи необходимо рассматривать соответствующие приближенные методики в прикладной математике [2].

На их базе существуют возможности для того, чтобы решения были получены в аналитической форме, а точность будет достаточная, чтобы ее применять в инженерных приложениях.

Если сравнивать с классическими методами, то такие подходы имеют большее преимущество.

Метод Фурье достаточно известен в задачах теплопроводности. На нем основывается аналитическая теория краевых задач, связанных с переносом.

Анализ показывает, что в ходе его использования требуется, чтобы были определены функции, которые удовлетворяют уравнениям, возникающим в ходе метода разделения переменных. Результаты получаются лишь если решения просты.

Когда после того, как прошло разделение переменных возникают достаточно сложные дифференциальные уравнения, тогда использование метода Фурье будет неэффективным.

Кроме метода Фурье может быть использован метод Бубнова-Галеркина. Тогда требуется введение дополнительных краевых условий.

Это вытекает из того, что в краевой задаче определяются собственные числа. Указанные условия получаются если дифференцирование относительно граничных точек дифференциального уравнения в задаче Штурма-Лиувилля.

Что позволяет достичь ортогональный метод? По приближенным решениям обеспечивается высокая точность, если удастся по уравнениям обеспечить разделение переменных [3].

В рамках указанного подхода можно значительным образом обеспечить расширение по классам задач, которые решаются с

---

Клименко Юрий Алексеевич – Воронежский институт высоких технологий, аспирант, e-mail: [klm71165@mail.ru](mailto:klm71165@mail.ru).

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, профессор, e-mail: [app@vivt.ru](mailto:app@vivt.ru).

привлечением метода Фурье. Из чего это вытекает?

Ортогональный метод Бубнова-Галеркина является универсальным. То есть, его можно применять при рассмотрении любых дифференциальных операторов [4, 5].

Существует такое понятие, как толщина термического слоя, которая используется в некоторых методах. Можно выделить две стадии в процессе нагрева.

В первой из них температурный фронт постепенным образом проникает. Во второй – по всему объему объекта происходит изменение температуры пока не наступит стационарный режим.

Тогда возникают возможности для определения в первых приближениях решений, которые по инженерным приложениям вполне приемлемы.

В качестве недостатка можно указать в таком подходе требования к тому, чтобы априорным образом вести подбор температурной функции.

Во многих случаях исследователи ограничиваются параболой, степень которой не выше кубической. Это вытекает из того, что конечные результаты будут зависеть от принятого температурного профиля.

Следует отметить интегральный метод теплового баланса. В нем происходит сведение решения, соответствующего уравнению в частных производных к тому, чтобы осуществлять интегрирование по обыкновенному интегральному уравнению. Тогда решение можно получить аналитическим образом.

Если существует сложная зависимость для физических свойств, то такой метод удобно применять. Кроме того, помимо теплопроводности можно учесть и конвекцию.

В указанном методе могут встретиться ограничения. Например, граничные условия могут меняться импульсным образом.

Тогда температурные кривые, которые будут представляться при помощи квадратных парабол, не будут соответствовать действительным профилям в подобных задачах.

Если температура меняется немонотонным образом, нет возможности для того, чтобы прийти к удовлетворительному решению.

Полиномы с высокими степенями предоставляют возможности для повышения

точности решения. Но тогда оказывается недостаточно учета условий на фронте волны и краевых условий, чтобы в полиномах определять коэффициенты.

В этой связи важно привлекать дополнительные краевые условия. Они предоставляют возможности для того, чтобы в полиномах с высокими степенями вести определение неизвестных коэффициентов.

Эти дополнительные краевые условия можно найти при помощи исходных краевых условий, а также первичного уравнения задачи. Тогда происходит процесс их дифференцирования.

Полученные соотношения будут сопоставляться относительно граничных задач.

В ряде случаев считается, что от температуры не зависят теплофизические свойства в краевых задачах теплообмена. Но если изменение температуры соответствует широкому диапазону, то тогда мы приходим к нелинейной задаче.

Определение ее решения является достаточно сложным процессом, аналитические методы являются неприемлемыми. Но можно опираться на интегральный метод.

Его можно эффективным образом применять, если в задачах переменные физические свойства, переменные начальные условия, переменные с точки зрения времени краевые условия.

Приближенные подходы применяются тогда, когда нет возможностей для непосредственного интегрирования уравнений в задачах. Достаточно распространенными являются методы, связанные с тем, что совместным образом применяются точные и приближенные подходы [6, 7].

Тогда точные методы Фурье применяются при определении временной переменной в рамках безграничной области. Приближенные методы используются в рамках ограниченных областей, где изменяются декартовы координаты. Среди приближенных методов можно отметить вариационные, ортогональные, методы взвешенных невязок.

Задача, связанная с пространственными координатами на основе метода Фурье может быть решена при помощи какого-то приближенного метода. Решение представляется как ряд, в который входят неизвестные коэффициенты, а также координатные функции.

Их выбор ведется таким способом, чтобы было выполнение по граничным условиям. Невязка дифференциального уравнения позволяет определить коэффициенты решения.

Тогда приходим к системе алгебраических уравнений. Для матрицы уравнения характерна плохая обусловленность.

В этой связи может потребоваться использование дополнительных граничных условий, что позволяет справляться с плохой обусловленностью матрицы.

Таким образом, при решении задач, которые связаны с переносом, необходимо комплексным образом использовать методы математической физики.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука. – 1988. – 512 с.
2. Уроев В. М. Уравнения математической физики / В. М. Уроев. – М.: НФ Яуза. – 1998. – 373 с.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М.: Наука. – 1973. – 407 с.

4. Ветров А. Н. Обработка разнодиапазонных изображений на базе матричных приборов с зарядовой связью / А. Н. Ветров, А. Ю. Потлов, С. В. Фролов, Д. Е. Судаков // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 1 (36).

5. Ветров А. Н. Оценка эффективности пространственной интерполяции при обработке совмещенных разнодиапазонных изображений / А. Н. Ветров, А. Ю. Потлов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2022. – Т. 10. – № 1 (36).

6. Ломакина Л. С. Оптимизация алгоритмов синтеза контролепригодных систем / Л. С. Ломакина, С. А. Манцеров // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

7. Машков В. Г. Оценка точности реконструкции электрофизических и геометрических параметров поляриметрическим методом многослойных диэлектрических сред / В. Г. Машков, В. А. Малышев // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 2 (33).

## THE ANALYSIS OF MATHEMATICAL POSSIBILITIES SIMULATION OF TRANSFER PROCESSES

© 2022 Yu. A. Klimenko, A. P. Preobrazhenskiy

*Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)*

*The paper discusses some of the problems that are associated with the modeling of transfer processes. The main methods on the basis of which the corresponding classes of problems can be solved are considered. Their advantages and disadvantages are discussed. The necessity of taking into account the boundary conditions in the course of consideration is noted. It is shown that it is required to ensure the stability of the obtained solutions.*

*Keywords: modeling, transfer process, method.*