

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

© 2022 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ характеристик колебаний физического маятника. Показано, как зависит время колебаний от угла. Исследовано относительное изменение периода маятника в зависимости от максимального угла отклонения. Показана связь угла отклонения маятника и момента инерции. Дана иллюстрация зависимости относительного отклонения периода колебаний от периода колебаний в приближении малых амплитуд.

Ключевые слова: колебания, физический маятник, движение, период.

При рассмотрении колебательных систем на практике представляет интерес рассмотрение систем с малыми колебаниями. Среди них можно указать нелинейные системы [1, 2].

В качестве простейшей механической системы, которая является нелинейной, а также консервативной, рассмотрим физический маятник (рис. 1). Основным закон его динамики, связанный с вращательным движением, представляется в следующем виде:

$$I \ddot{\varphi} = -mgL \sin(\varphi). \quad (1)$$

В ходе моделирования считается, что $M = -mgL \sin(\varphi)$ – момент силы тяжести, I – момент инерции соответствующего физического маятника, если проводить его рассмотрение относительно точки подвеса O .

Предположим, что в ходе анализа амплитуда колебаний является достаточно малой. Тогда частота будет определяться на основе выражения

$$\omega_0 = 2\pi / T = \sqrt{mgL / I}. \quad (2)$$

От уравнения (1) перейдем к уравнению [3, 4]

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin(\varphi) = 0. \quad (3)$$

Переписать его можно в виде

$$d\dot{\varphi} / d\varphi = -\omega_0^2 \sin(\varphi) / \dot{\varphi}. \quad (4)$$

При анализе фазовой плоскости уравнение движения, которое соответствует сепаратрисе, представляется в следующем виде

$$\dot{\varphi}^2 / 2 = \omega_0^2 (1 + \cos(\varphi)). \quad (5)$$

Тогда

$$\dot{\varphi} / 2 = 2\omega_0 \cos(\varphi / 2). \quad (6)$$

Время, в течение которого маятник будет двигаться, когда угол будет меняться от 0 до φ , будет представляться на основе выражения [3, 4]

$$t = (1 / \omega_0) \int_0^{\varphi} d\eta / \cos(\eta) = (1 / \omega_0) \ln \operatorname{ctg}((\pi - \varphi) / 4) \quad (7)$$

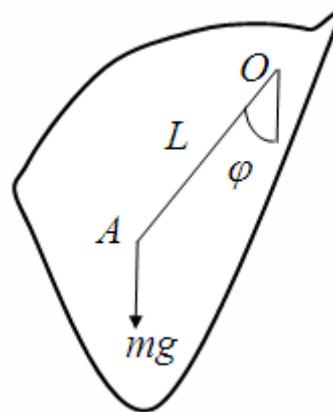


Рисунок 1. Иллюстрация схемы физического маятника

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: kozl99daryanik@yandex.ru.

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, профессор, e-mail: app@vivt.ru.

Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: shunul33vuv@yandex.ru.

На рисунке 2 приведена зависимость $t(\varphi)$ для различных значений L и I ($m=10$ кг). Из этого выражения (7) следует, что

$$\varphi = \pi - 4 \arctg(\exp(-\omega_0 t)). \quad (8)$$

На рисунке 3 приведена зависимость $\varphi(I)$ для заданных значений L и t .

Для того, чтобы найти период колебаний анализируемого физического маятника, воспользуемся законом сохранения энергии

$$(I/2)(d\varphi/dt)^2 = mgL(\cos\varphi - \sin\varphi_{max}). \quad (9)$$

В представленном выражении φ_{max} соответствует максимальному значению угла φ . Тогда

$$d\varphi/dt = (4\pi/T_0)\sqrt{\sin^2(\varphi_{max}/2) - \sin^2(\varphi/2)}. \quad (10)$$

В ходе моделирования мы считаем, что $T_0 = 2\pi\sqrt{I/(mgL)}$, который соответствует приближению малых амплитуд. После интегрирования получаем выражение для периода

$$T = (T_0/\pi) \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi / \sqrt{\sin^2(\varphi_{max}/2) - \sin^2(\varphi/2)} \quad (11)$$

Введем замену переменной

$$x = \sin(\varphi/2) / \sin(\varphi_{max}/2), \quad x = \sin(\tau). \quad (12)$$

Тогда

$$T = (2T_0/\pi) \int_0^{\pi/2} d\tau / \sqrt{1 - f^2 \sin^2(\tau)}, \quad (13)$$

где $f = \sin(\varphi_{max}/2)$. Проведем разложение в ряд с учетом $|f \sin(x)| \leq 1$:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (14)$$

Тогда

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right) + \dots \right) \quad (15)$$

На рисунке 4 показана зависимость того, как меняется относительное отклонение периода маятника от максимального значения угла отклонения в зависимости от числа учитываемых членов в разложении (15).

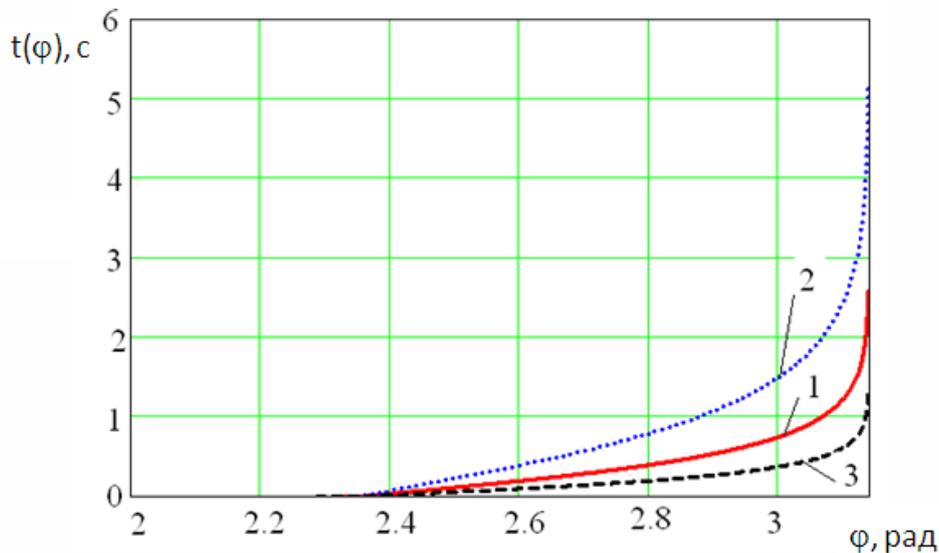


Рисунок 2. Иллюстрация зависимости $t(\varphi)$, кривая 1 – $I=15$ кг*м², $L=1.05$ м; кривая 2 – $I=60$ кг*м², $L=1.05$ м; кривая 3 – $I=15$ кг*м², $L=4.2$ м.

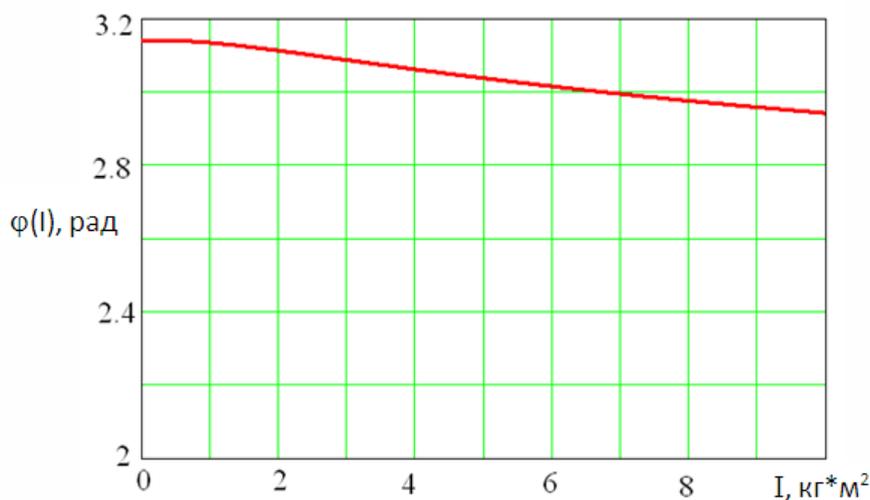


Рисунок 3. Иллюстрация зависимости $\varphi(I)$, $L=1.05$ м, $t=0.5$ с.

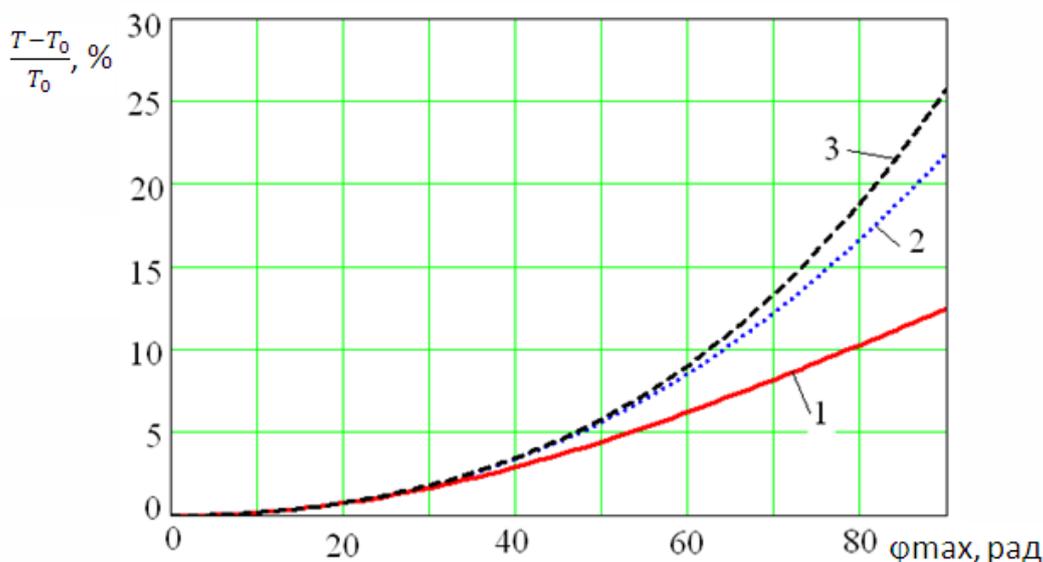


Рисунок 4. Иллюстрация зависимости относительного отклонения периода колебаний от периода колебаний в приближении малых амплитуд (кривая 1 – 2 члена в разложении, кривая 2 – 3 члена в разложении, кривая 3 – 4 члена в разложении)

Таким образом, в ходе решения задач, связанных с оценкой характеристик колебаний физического маятника были получены полезные с точки зрения практики зависимости.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова //

Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

THE INVESTIGATION OF OSCILLATIONS OF THE PHYSICAL PENDULUM

© 2022 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)

The paper analyzes the characteristics of oscillations of a physical pendulum. It is shown how the oscillation time depends on the angle. The relative change in the period of the pendulum as a function of the maximum deflection angle has been studied. The relationship between the angle of deflection of the pendulum and the moment of inertia is shown. An illustration is given of the dependence of the relative deviation of the period of oscillations on the period of oscillations in the approximation of small amplitudes.

Keywords: oscillations, physical pendulum, movement, period.