УДК 681.3

АНАЛИЗ ВАРИАЦИОННЫХ ПОДХОДОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2022 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, Н. М. Токарева, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)
ООО «3Д-комплекс» (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ вариационных подходов, которые могут быть применены в теории упругости. Рассматривается деформация механического тела. Считается, что перемещения и деформации являются в ходе анализа малыми. Напряжения позволяют описать интенсивность внутренних сил. Показано, каким образом формируется уравнение равновесия для объекта в ходе моделирования.

Ключевые слова: вариационный подход, теория упругости.

Если рассматривать механику деформируемого твердого тела, то в ней достаточно общим можно считать принцип возможных перемещений. Его можно применять для систем, являющихся консервативными и неконсервативными. При этом рассматриваются любые механические свойства объектов. Тогда будут самые разные зависимости среди напряжений и деформаций [1, 2]. Предположим, что рассматривается механическая система, которая приведена на рисунке.

В ней к деформируемому телу происходит приложение распределенных поверхностных {p}={px, py, pz}T и объемных {g}={gx, gy, gz}T сил. Есть закрепление объекта на основе связей. Они не позволяют, чтобы перемещение его в виде жесткого целого. Предположим, что анализируемая система будет в состоянии равновесия [3].

Существуют действительные перемещения {u}={u, v, w}T. На их базе происходит описание того, как будет реализовываться переход от первичного недеформированного состояния к равновесному деформированному состоянию [4].

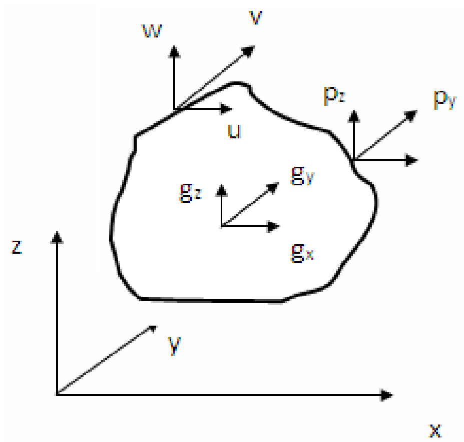

Рисунок. Иллюстрация механической системы

Вследствие таких перемещений будут образовываться деформации {ε} = {ε x, ε y, ε z, γxz, γyz, γxy}T, появляются напряжения {σ}={ σ x, σ y, σ z, τxz, τyz, τxy}T.

Основываемся на том, что деформации и перемещения рассматриваются как достаточно малые. В этой связи можно осуществлять отождествление поверхности и объема для деформированного состояния с поверхностью и объемом для недеформированного состояния [5].

Для тех точек, которые относятся к равновесному состоянию, можно обеспечить возможные перемещения, которые являются малыми {δu}={δu, δv, δw}T. Внутри объема объекта наблюдается непрерывность функций δu, δv, δw. Они характеризуются непрерывными производными требуемых порядков. Для такой области поверхности, по которой наблюдается запрет перемещений или

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: kozl99daryanik@yandex.ru.
Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, профессор, e-mail: app@vivt.ru.
Токарева Наталия Михайловна – генеральный директор ООО «3Д-комплекс», e-mail: tokkarrewwa__561@mail.ru.
Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: shunul33vvv@yandex.ru.

они характеризуются заданными значениями, происходит обращение в нуль возможных перемещений [6, 7].

Можно обозначить принцип возможных перемещений таким способом: при наблюдении системы, которая будет в состоянии равновесия, будет наблюдаться равенство нулю по возможным перемещениям суммы всех работ для внутренних и внешних сил [8].

Предположим, что когда сообщаются возможные перемещения для точек тела, то можно провести расчет по работе, которая совершается со стороны внутренних и внешних сил [9].

Сумма всех работ представляется следующим образом:

$$\delta R = \int_V \delta(u)^T \{g\} dV + \int_S \delta(u)^T \{p\} dS . \quad (1)$$

В указанном выражении S и V рассматриваются в виде поверхности и объема анализируемого объекта.

На основе напряжений можно описать для нагруженного тела интенсивность внутренних сил. В связи с тем, что при напряжениях в качестве обобщенных перемещений можно считать деформации, тогда требуется совершение работы для того, чтобы сообщить дополнительные деформации $\delta(\varepsilon)$, которые будут вызываться возможными перемещениями $\delta(u)$:

$$\delta u = \int_V \delta(\varepsilon)^T \{\sigma\} dV . \quad (2)$$

Основываясь на принципе возможных перемещений, можно записать:

$$-\delta R + \delta U = 0 . \quad (3)$$

Видно, что данные члены входят в это выражение с разными знаками. В виде уменьшения потенциала по внешним силам рассматривается слагаемое δR. В качестве увеличения потенциальной энергии деформации объекта рассматривается слагаемое δU.

После этого есть возможность для записи аналитической формулировки принципа возможных перемещений таким способом:

$$\int_V \delta(\varepsilon)^T \{\sigma\} dV + \\ + \int_V \delta(u)^T \{g\} dV + \int_S \delta(u)^T \{p\} dS = 0 . \quad (4)$$

Есть возможность для того, чтобы уравнение равновесия внутри объекта, а также на его поверхности было представлено на основе выражения (4). При условии того, что не будут вводиться дополнительные ограничения относительно деформирования объекта внутри его объема, можно считать, что существуют линейные соотношения между деформациями и перемещениями:

$$[\varepsilon] = [L][u] . \quad (5)$$

В указанном выражении L рассматривается в виде матрицы линейных дифференциальных операторов

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} . \quad (5)$$

Тогда (3) можно переписать следующим образом:

$$\int_V (\sigma_x(\delta \frac{\partial u}{\partial x}) + \sigma_y(\delta \frac{\partial u}{\partial y}) + \sigma_z(\delta \frac{\partial u}{\partial z}) + \tau_{xz}\delta(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) + \tau_{yz}\delta(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) + \tau_{xy}\delta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}))dV - \\ - \int_V (g_x \delta u + g_y \delta v + g_z \delta w) dV + \int_S (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS . \quad (6)$$

Можно использовать формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int_V (\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV = \int_S \xi \varphi \ell dS - \int_V (\frac{\partial \xi}{\partial x} \varphi dV . \quad (7)$$

В этом выражении ξ и φ рассматриваются в виде функций координат, $\ell = cos(n,x)$.

Выражение (6) мы можем переписать в следующем виде:

$$\int_S (\sigma_x \ell + \tau_{xy} k + \tau_{xz} h - p_x)\delta u dS +$$
$$+\int_S (\tau_{xy} \ell + \sigma_y k + \tau_{yz} h - p_y)\delta v dS +$$
$$+\int_S (\tau_{xz} \ell + \tau_{yz} k + \sigma_z h - p_z)\delta v dS -$$
$$-\int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x\right)\delta u dV - \tag{8}$$
$$-\int_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + g_y\right)\delta v dV -$$
$$-\int_V \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z\right)\delta w dV = 0 .$$

В выражении (8) ℓ, k и h рассматриваются в виде косинусов углов между внешними нормалями и осями x, y и z.

Вариации δu, δv, δw являются произвольными. Равенство нулю (6) будет обеспечено, если

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + g_x = 0 ,$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + g_y = 0 , \tag{9}$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z = 0 .$$

Эти условия (9) представлены как уравнения равновесия прямоугольного элементарного участка тела. Чтобы разбить область на прямоугольные фрагменты, можно применять методы исчерпывания [10]. Существуют возможности для выделения двух типов сложных областей. Первые формируются на базе из непересекающихся замкнутых подобластей. Вторые состоят из областей, характеризуемых внутренними ограничениями, как поверхности или кривые.

Также могут быть использованы методы отображения. В них взаимнооднозначным образом формируется отображения среди областей, которые характеризуются различными геометрическими формами. Тогда, за счет применения оператора отображения, есть возможности для того, чтобы сделать перенос сетки от определенной области к заданной.

Вывод. В работе показаны ключевые особенности вариационных принципов, применяемых в ходе анализа механических систем. Проиллюстрировано, каким образом строится уравнение равновесия для объекта.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Абовский Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга; под ред. Н. П. Абовского. – М.: Наука, 1978. – 228 с.

2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

3. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М.: Наука, 1983. – 448 с.

4. Григолюк Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука, 1988. – 232 с.

5. Карпов, В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек / В. В. Карпов. – СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 330 с.

6. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

7. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).

8. Аблаев Р. Р. Анализ остаточных деформаций в элементах кузова легкового автомобиля методом прямого интегрирования / Р. Р. Аблаев, А. Р. Аблаев, Л. С. Абрамова, В. А. Ксенофонтова // International Journal of Advanced Studies. – 2020. – Т. 10. – № 1. – С. 35-49.

9. Биргер И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М.: Издательство «Наука». – 560 с.

10. Галанин М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции

сложных пространственных областей: прямые методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов // Доступно по: https://keldysh.ru/papers/2006/prep10/prep2006_10.html.

THE ANALYSIS OF VARIATIONAL APPROACHES WHICH APPLIED IN THE THEORY OF ELASTICITY

© 2022 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, N. M. Tokareva, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)
LLC «3D complex» (Voronezh, Russia)

The paper provides an analysis of variational approaches that can be applied in the theory of elasticity. The deformation of a mechanical body is considered. It is assumed that displacements and deformations are small during the analysis. Stresses make it possible to describe the intensity of internal forces. It is shown how the equilibrium equation for the object is formed during the simulation.

Keywords: variational approach, theory of elasticity.