УДК 624.04

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2021 Д. Н. Козлова, А. П. Преображенский, В. В. Шунулина

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье рассматриваются проблемы создания строительных конструкций, удовлетворяющих требованиям прочности и устойчивости.

Ключевые слова: прочность, строительная конструкция, устойчивость.

Во многих практических приложениях необходимо исследовать характеристики движения (в том числе, равновесие) механических систем.

Решение подобных задач может быть найдено, например, на основе систем дифференциальных уравнений. В общем случае их рассмотрение сопряжено с определенными трудностями.

Если движения являются малыми, тогда есть возможности для перехода от нелинейных систем к линейным [1]. То есть, происходит процесс линеаризации. Пусть мы рассматриваем уравнения в первом приближении [2, 3]. Можно сделать вывод относительно того, устойчивой ли будет движение для нелинейной системы.[1]

Есть возможности для того, чтобы указать признаки, которые позволят сделать заключение об устойчивости движения. Важно, что для этого нет необходимости в том, чтобы решать дифференциальные уравнения, описывающие процесс движения объектов [4].

Когда создается проект механической системы, тогда мы можем обозначить определенные допуски. Механические элементы будут функционировать при воздействии возмущающих сил, являющимися случайными.

Их трудно учесть в дифференциальных уравнениях. Но вследствие случайных воздействий на расчётные движения исследователи могут прийти к самым разным результатом [5].

Устойчивое движение будет наблюдаться тогда, когда возмущенное движение будет слабо отличаться от расчетного.

Неустойчивое движение мы наблюдаем, когда возмущенное движение очень сильно будет отличаться от расчетного.

Большое число технических объектов (корабли, самолеты, ракеты и т. д.) должны устойчивым образом поддерживать сохранение заданного курса. Обозначенный режим следует поддерживать для турбин, генераторов и др.

Гироскопические компасы должны устойчивым образом демонстрировать, какое направление будет по географическому меридиану.

С точки зрения теории и практики, исследовать устойчивость движения механических систем весьма важно.

Уже в конце 19 в. А. М. Ляпуновым были продемонстрированы особенности общей постановки задачи, связанной с устойчивостью движения. Созданные им отходы являются востребованными и в наше время.

Пусть механическая система характеризуется голономными связями. Тогда для ее описания удобно опираться на обобщенные координаты $\{q_i\}$, $i=1,\ldots,I$. В этом случае движение механических систем можно описать на основе уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = Q_i\,, i = 1, \ldots, I \quad (1)$$

Здесь T является кинетической энергией системы, когда существуют голономные стационарные связи. Для нее мы можем записать такое выражение:

$$T = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j$$

То есть, она рассматривается как однородная функция второй степени по обобщенным скоростям.

В указанном выражении есть зависимость коэффициентов $\{a_{ij}\}$, $i=1,\ldots,I$. от

Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, kozl99daryanik@yandex.ru.

Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, профессор, app@vivt.ru.

Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, shunul33vvv@yandex.ru.

обобщенных координат. Q_i -это обобщенные силы, они будут активными, с точки зрения воздействия на механические системы. Существует их зависимость от обобщенных координат, скоростей, а также времени.

В ходе моделирования необходимо принимать во внимание, что в уравнениях Лагранжа отражается движение различных систем анализируемого объекта – электрических, механических, гидравлических и др.

С точки зрения обобщенных координат, мы выбираем декартовы координаты точек, их скорости и др. В результате мы можем увидеть общность в подходах, связанных с исследованием устойчивости самых разных систем.

Это вытекает из того, что будет определена устойчивость по решениям дифференциальных уравнений.

Можно провести решение системы (1), которая получается при разрешении относительно вторых производных от обобщенных координат, тогда получим:

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = G_i\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right), \quad i = 1, \dots, I \qquad (2)$$

В выражении (2) $G_i\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right)$ являются известными функциями времени, обобщенных координат и скоростей. Поскольку есть дифференциальное уравнение, требуется для него обозначить начальные условия для начального момента времени:

$$q_i = q_i\,(t, q^0, \dot{q}^0), i = 1, \dots, I. \qquad (3)$$

Из (3) вытекает, что для любой системы величин ${q^0}_i, {\dot{q}^0}_i$ соответствует определенный вид движений.

Разные движения в механической системе будут связаны с различными системами величин. Если зафиксировать некоторый момент времени и соотнести с ним начальные условия ${q^0}_{in}, {\dot{q}^0}_{in}$. Тогда для частного решения мы имеем:

$$q_i = q_i\left(t,\ t_0,\ {q^0}_n, {\dot{q}^0}_n\right), i = 1, \dots, I \qquad (4)$$

Мы рассматриваем его, как невозмущенное. Для него дадим обозначение

$$q_i = f\ (t\,), i = 1, \dots, I. \qquad (5)$$

Исследователи могут сделать выбор движения, которое будет рассматриваться в виде невозмущенного.

Рассмотрим пример, когда происходит движение сферического тела по инерции. Для такого случая запишем дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} A \cdot \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \\ B \cdot \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0, \\ C \cdot \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

В указанной системе p, q, r являются проекциями вектора угловой скорости на оси координат, являющихся подвижными,

Они совпадают с главными осями инерции объекта в той точке, которая закреплена. Будем считать, что A>B>C.

В системе уравнений мы можем использовать такие частные решения:

$$\begin{gathered} p = p_0 = const, q_0 = r_0 = 0, \\ q = q_0 = const, p_0 = \ r_0 = 0, \\ r = r_0 = const, p_0 = q_0 = 0. \end{gathered} \qquad (7)$$

Они будут соответствовать случаю, когда твёрдое тело будет вращаться вокруг оси эллипсоида инерции (малая, средняя и большая).

Считаем, что первый из видов движения является не возмущенным, тогда

$$x_1 = p - p_0, x_2 = q, x_3 = r. \qquad (8)$$

Если указанные обозначения мы подставим в систему (6), тогда можно записать дифференциальные уравнения, которые соответствуют возбужденному движению так

$$\begin{cases} A \cdot \frac{dx_1}{dt} = (B - C)x_2x_3, \\ B \cdot \frac{dx_2}{dt} = (C - A)(x_i + p_0)x_3, \\ C \cdot \frac{dx_3}{dt} = (A - B)(x_i + p_0)x_2. \end{cases} \qquad (9)$$

Решения для возмущенного движения могут быть записаны в определённом виде.

Например, они в ряде случаев соответствуют вариантам малых возмущений координат и скоростей. Тогда говорим о линеаризации уравнений. Решение x_0=0 можно рассматривать как частные для уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x, \dots, x_n). \qquad (10)$$

Функции в правой части мы разложим ряд Маклорена. Тогда

$$\frac{dx_i}{dt} = \ a_{i1}x_1 + \ \dots + \ a_{in}x_n, i = 1, \dots\ , n. \quad (11)$$

Коэффициенты рассчитываются таким образом:

$$a_{ik} = \left(\frac{dX_i}{dx_k}\right)_{x_k = 0}, i, k = 1, \dots\ , n. \quad (12)$$

Покажем, как рассматриваемый подход можно применить для решения задачи колебания груза с массой M на пружине, в которой характеристика жесткости будет являться нелинейной. То есть, дифференциальное уравнение мы запишем в виде

$$m\ddot{x} + \ \varphi(x) = \ mg. \qquad (13)$$

Нелинейная функция разлагается в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора. Исходим из того, что имеем малую величину $x_1=x-x_0$.

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0. \quad (14)$$

Линеаризация будет тем точнее, чем ближе будет значение анализируемого аргумента к анализируемой точке.

Если характеристика рассматриваемого маятника будет описываться при помощи кубической параболы, тогда получим

$$m\ddot{x} + x^3 = mg. \quad (15)$$

После осуществления линеаризации возле положения статического равновесия при учете $x=x_0+x_1$ уравнение в первом приближении получим

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0,\ k = 3cx_0^3. \quad (16)$$

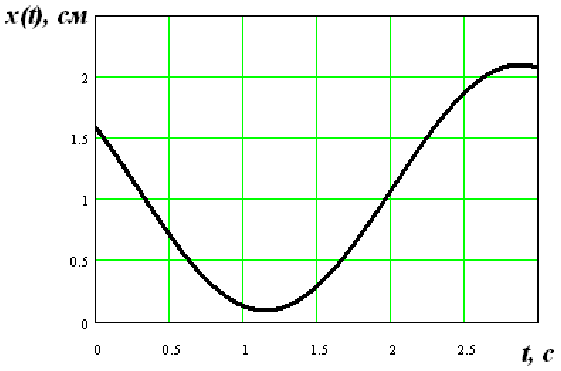

Рисунок. Иллюстрация зависимости x(t).

На рисунке приведены результаты зависимости x(t) при условии начальной фазы $\varphi_0=\pi/3$, $c=1$, $x_0=1.1$ см.

Рассмотренное решение в линейном приближении будет устойчивым. Это вытекает из первой теоремы Ляпунова.

Таким образом, в работе продемонстрирована возможность получения устойчивого решения колебаний маятника для условий линеаризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голованчиков А. Б. Сравнение точности аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших относительных квадратов с методом наименьших квадратов / А. Б. Голованчиков, М. К. Доан, А. В. Петрухин, Н. А. Меренцов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – Т. 8. – № 1 (28). – С. 38-39.

2. Львович Я. Е. Оптимизация проектирования многоаспектной цифровой среды системы однородных объектов на основе процедур декомпозиции и агрегации / Я. Е. Львович, А. В. Питолин, С. О. Сорокин // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 2. (25). – С. 186-195.

3. Букеткин Б. В. Экспериментальная механика / Б. В. Букеткин, А. А. Горбатовский, И. Д. Кисенко и др.// Под ред. Р. К. Вафина, О. С. Нарайкина. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана. 2004. – 136 с.

4. Икрин В. А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: Учебник для студентов, обучающихся по направлению 653500 «Строительство» / В. А. Икрин. − М: Изд. АСВ, 2004. − 424 с.

5. Леденёв В. В. Обследование и мониторинг строительных конструкций зданий и сооружений : учебное пособие / В. В. Леденёв, В. П. Ярцев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2017. – 252 с.

ABOUT THE PROBLEMS OF STRENGTH ASSESSMENT BUILDING CONSTRUCTIONS

© 2021 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh. Russia)

The paper deals with the problems of creating building structures that meet the requirements of strength and stability.

Keywords: strength, building structure, stability.