

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

© 2023 Д. Н. Козлова¹, А. П. Преображенский², В. В. Шунулина³

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)

В статье дается анализ характеристик колебаний двухмассовой механической системы. Приведена схема изменения кинетической и потенциальной энергии. Проводится сравнение с колебаниями, совершаемыми математическим маятником. Определена частота колебаний двухмассовой системы. Найдена зависимость частоты колебаний от соотношения между массами для некоторых значений расстояний, на которых находятся грузы.

Ключевые слова: колебания, двухмассовая механическая система, движение, период.

В современной физике и технике почти нет областей, в которых колебания не играют заметной роли. Под колебаниями понимают такие процессы, которые отличаются определенной степенью повторяемости [1, 2].

Простейшей системой с одной степенью свободы является маятник. Гармонические колебания представляют особый интерес, поскольку они относительно могут быть описаны.

Если провести обобщение математического маятника на случай, когда используют несколько грузов, то такой случай можно рассматривать в виде обобщения физического маятника.

Пусть имеется жесткий стержень, к которому прикреплены два груза на расстоянии L_1 и L от точки подвеса (рис. 1). Требуется определить частоту колебаний указанного маятника. Для положения равновесия будет вертикальное положение стержня. Если вывести маятник из положения равновесия, то стержень будет отклонен на угол φ . В таком случае грузы будут подняты на соответствующую высоту относительно положения равновесия. Высота подъема первого груза $h_1 = L_1(1 - \cos \varphi)$, высота подъема второго груза $h_2 = L(1 - \cos \varphi)$. Тогда потенциальная энергия двух грузов будет равна:

$$\begin{aligned} E_p &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = \\ &= m_1 g L_1 (1 - \cos \varphi) + m_2 g L (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть маятник пришел в движение. Он будет перемещаться к положению равновесия. При этом мы можем наблюдать увеличение линейных скоростей [3]. Тогда в положении равновесия кинетическая энергия будет равна:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (2)$$

здесь v_1 и v_2 – являются линейными скоростями, с которыми двигаются грузы [4]. Можно их выразить через угловую скорость следующим образом:

$$v_1 = \Omega L_1, \quad v_2 = \Omega L. \quad (3)$$

¹ Козлова Дарья Николаевна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: kozl99daryanik@yandex.ru

² Преображенский Андрей Петрович – Воронежский институт высоких технологий, профессор, e-mail: app@vivt.ru

³ Шунулина Виктория Владимировна – Воронежский институт высоких технологий, студент, e-mail: shunul33vvv@yandex.ru

В таком случае кинетическая энергия будет равна:

$$E_k = \frac{1}{2} \Omega^2 (m_1 L_1^2 + m_2 L^2). \quad (4)$$

Будем полагать, что в рассматриваемой системе отсутствует трение. Тогда приравняем кинетическую и потенциальную энергии. В результате получим:

$$\Omega^2 = 2g \frac{m_1 L_1 + m_2 L}{m_1 L_1^2 + m_2 L^2} (1 - \cos \varphi). \quad (5)$$

Теперь можно сравнить наш комбинированный маятник с таким математическим маятником, у которого длина L_M , для которой угловая скорость будет такой же. В случае математического маятника мы запишем:

$$\Delta E_p = m_1 g L_M (1 - \cos \varphi), \quad E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \Omega L_M. \quad (6)$$

Если использовать закон сохранения энергии, то:

$$\Omega^2 = 2 \frac{g}{L_M} (1 - \cos \varphi). \quad (7)$$

Если сравнить выражения (5) и (7), то видно равенство угловых скоростей Ω для одного и того же угла φ . В результате можно определить длину эквивалентного математического маятника:

$$L_M = \frac{m_1 L_1^2 + m_2 L^2}{m_1 L_1 + m_2 L}. \quad (8)$$

Тогда частота колебаний комбинированного маятника равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L_M}} = \sqrt{g \frac{m_1 L_1 + m_2 L}{m_1 L_1^2 + m_2 L^2}}. \quad (9)$$

Пусть общая длина маятника $L = 10 \text{ м}$. Введем обозначения $\zeta = L_1 / L$, $\eta = m_1 / m_2$.

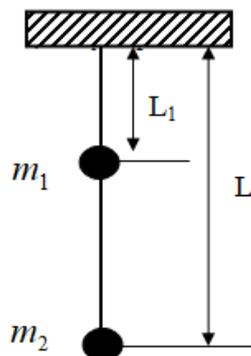


Рисунок 1. Схема двухмассовой колебательной системы.

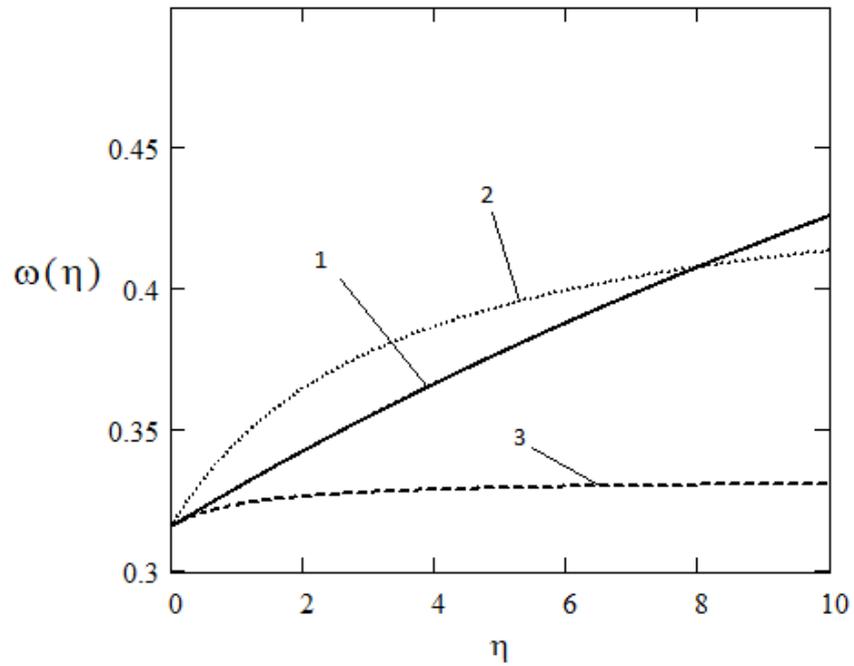


Рисунок 2. Иллюстрация зависимости частоты колебаний от η .

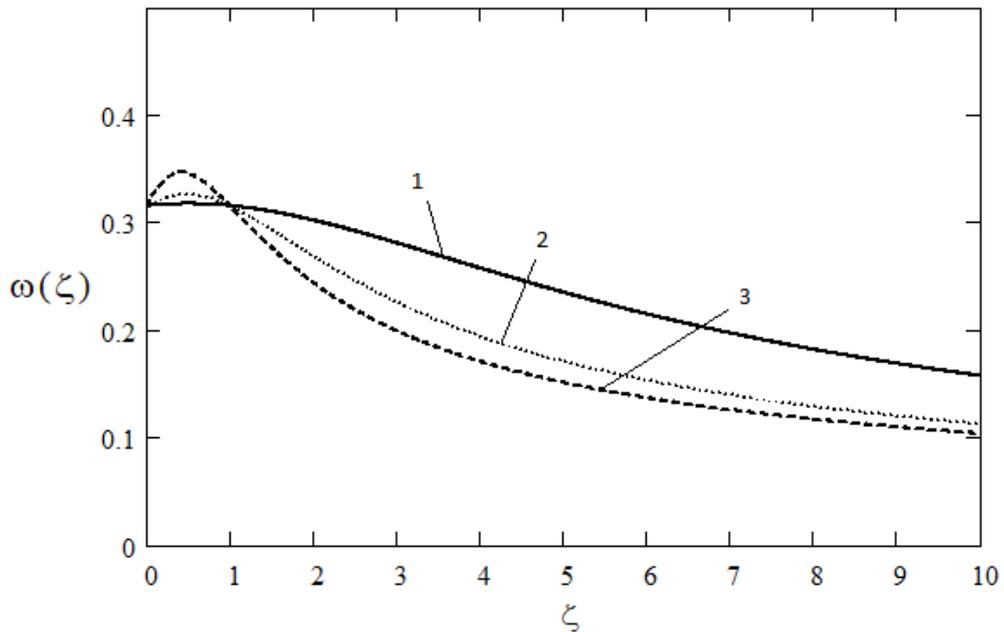


Рисунок 3. Иллюстрация зависимости частоты колебаний от ζ .

На рисунке 2 кривая 1 соответствует $\zeta=0,1$, кривая 2 соответствует $\zeta=0,5$, кривая 3 соответствует $\zeta=0,9$. Видна монотонная зависимость частоты колебаний от η . На рисунке 3 кривая 1 соответствует $\eta=0,05$, кривая 2 соответствует $\eta=0,3$, кривая 3 соответствует $\eta=1$. Видна почти монотонная зависимость частоты колебаний от ζ .

Вывод. В работе проведено решение задачи механических колебаний в двухмассовой системе. Получены частотные зависимости амплитуд для заданных соотношений между массами грузов и отношений между длинами закрепления грузов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е. С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е. С. Сулоева, Н. В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).
2. Казанцев А. М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А. М. Казанцев, Р. А. Кочкаров, А. В. Тимошенко, А. А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4 (35).
3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

THE STUDY OF OSCILLATIONS IN TWO-MASS MECHANICAL SYSTEM

© 2023 D. N. Kozlova, A. P. Preobrazhenskiy, V. V. Shunulina

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)

The paper analyzes the characteristics of oscillations of a two-mass mechanical system. A diagram of changes in kinetic and potential energy is given. A comparison is made with the oscillations made by a mathematical pendulum. The oscillation frequency of a two-mass system is determined. The dependence of the oscillation frequency on the ratio between the masses for some values of the distances at which the loads are located is found.

Keywords: oscillations, two-mass mechanical system, motion, period.