

УДК 004.42

Математическое моделирование и программная реализация расширенного фильтра Калмана для повышения точности определения координат объекта на основе GPS-измерений

К.А. Белоусов, Е.А. Шипилова✉

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Рассматривается задача оценки состояния движущегося объекта по данным GPS-навигации, содержащим шум, с использованием расширенного фильтра Калмана. Получена нелинейная модель объекта в виде системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию координат, скорости и угла направления движения. Выполнена дискретизация модели и реализован метод расширенного фильтра Калмана. Разработан программный модуль с возможностью загрузки GPS-данных из файла и сохранения отфильтрованной траектории. Полученные результаты демонстрируют эффективность математического моделирования в системах навигации.

Ключевые слова: фильтр Калмана, расширенный фильтр Калмана, GPS-данные, дискретная динамическая модель, ковариационная матрица ошибок.

Mathematical Modeling and Software Implementation of Extended Kalman Filter for Improving Accuracy of Determining Coordinates of Object Based on GPS Measurements

K.A. Belousov, E.A. Shipilova✉

Voronezh State University, Voronezh, Russia

The problem of evaluating the state of a moving object from GPS navigation data containing noise using an extended Kalman filter is considered. A nonlinear model of the object was obtained in the form of a system of differential equations describing the evolution of coordinates, speed and angle of direction of movement. The model was sampled and the extended Kalman filter method was implemented. A software module has been developed with the ability to download GPS data from a file and save the filtered trajectory. The results obtained demonstrate the effectiveness of mathematical modeling in navigation systems.

Keywords: Kalman filter, extended Kalman filter, GPS data, discrete dynamic model, covariance error matrix.

Во многих областях теории стохастических систем, включая спутниковую навигацию, требуется оценивать вектор состояния, опираясь на косвенные измерения, так как прямые измерения состояния системы зачастую невозможно или неточно. Для решения подобных задач используются различные алгоритмы фильтрации, которые оценивают текущее состояние системы на основе предыдущих измерений и ее динамической модели.

Измерения, получаемые с помощью глобальных навигационных спутниковых систем (таких как GPS), подвержены различным видам шумов и искажений. На точность сигналов влияют как физические факторы (например, атмосферные помехи), так и технические ограничения сенсоров. Это приводит к значительным погрешностям,

особенно в динамических системах, где критично своевременно и точно оценивать координаты объекта.

При линейной модели и аддитивных гауссовских шумах оптимальное решение получают с использованием фильтра Калмана (ФК). В случае если модель объекта наблюдения или модель измерений нелинейные, то выбор алгоритма зависит от характера случайных воздействий. Если случайные воздействия подчинены гауссовскому закону распределения, то для данного случая применим расширенный фильтр Калмана (РФК) [1].

Расширенный фильтр Калмана использует линейную аппроксимацию нелинейной системы с помощью якобианов, что позволяет обобщить подход классического фильтра Калмана. РФК нашёл широкое применение в навигационных системах, в задачах управления беспилотными летательными аппаратами, а также в системах трекинга и предсказания движения объектов [2].

Целью работы было математическое моделирование и программная реализация РФК на языке программирования C++ с использованием библиотеки Eigen для повышения точности определения координат объекта на основе GPS-измерений. Полученные результаты могут быть использованы при построении навигационных модулей для подвижных роботов, дронов, транспортных средств и других автономных систем.

Научная новизна работы заключается в адаптации классических методов фильтрации к конкретной задаче обработки GPS-данных, а также в реализации и экспериментальной проверке РФК на реальных данных.

Фильтр Калмана является эффективным рекурсивным фильтром, оценивающим состояние динамических систем. Фильтр Калмана накладывает ограничения на используемые модели: это должны быть дискретные линейные модели в пространстве состояний. Дискретность означает, что модель работает «шагами». На каждом шаге (такте) вычисляется новое состояние системы по вектору состояния с предыдущего шага. Обычно, модели такого рода задаются системой разностных уравнений. Для вычисления оценки состояния системы на текущий такт работы ему необходима оценка состояния (в виде оценки состояния системы и оценки погрешности определения этого состояния) на предыдущем такте работы и измерения на текущем такте. Каждая итерация ФК делится на две фазы: экстраполяция (прогноз) и коррекция (рис. 1).

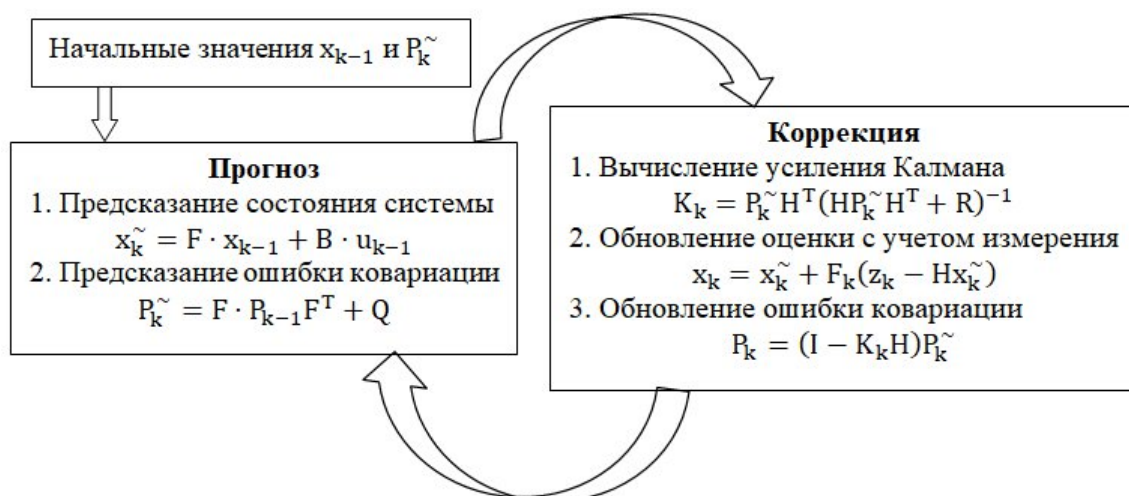


Рисунок 1. Структурная схема работы фильтра Калмана

Во время экстраполяции фильтр получает предварительную оценку состояния системы. В фазе коррекции априорная экстраполяция дополняется соответствующими текущими измерениями для коррекции оценки [3]. Эти две фазы последовательно чередуются: экстраполяция производится по результатам коррекции перед фиксацией новых данных о координатах наблюдаемого объекта, а коррекция – совместно с доступными на следующем шаге спрогнозированными значениями, $\hat{x}$ и т.д. Текущий шаг вычисления обозначают индексом k , прогнозируемые значения обозначим индексом $\sim$.

Этапы экстраполяции и коррекции подробно представлены на рисунке 1.

Рассмотрим движение БПЛА в горизонтальной плоскости, так называемую проблему 2d локализации [4]. В нашем случае это оправдано тем, что для многих практически встречающихся ситуаций БПЛА может оставаться примерно на одной и той же высоте. Это предположение широко используется для упрощения моделирования динамики летательных аппаратов. Динамическая модель БПЛА задается следующей системой уравнений (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \cos \eta(t), \\ \dot{y}(t) = v(t) \sin \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) = \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) = \varepsilon_{\omega}(t), \\ \dot{v}(t) = \varepsilon_v(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – координаты БПЛА, замеряемые GPS-датчиками в различные моменты времени, η – направление БПЛА, ω – угловая скорость БПЛА, и v – скорость БПЛА относительно земной поверхности (путевая скорость). Для упрощения решения, в рамках поставленной задачи η , ω , v , можно считать постоянными.

Измеряемые GPS-датчиками координаты БПЛА в связи с погрешностью измерений, свойственной всем объектам не являются точными значениями. Для применения фильтра Калмана необходимо динамическую модель (1) дискретизировать, т.е. представить в конечно-разностном виде, например методом Эйлера. Дискретную динамическую модель, описывающую движение БПЛА в горизонтальной плоскости можно представить в виде (2).

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k \Delta t_k \cos \eta_k, \\ y_{k+1} = y_k + v_k \Delta t_k \sin \eta_k, \\ \eta_{k+1} = \eta_k + \omega_k \Delta t_k, \\ \omega_{k+1} = \omega_k + \varepsilon_{\omega k}, \\ v_{k+1} = v_k + \varepsilon_{vk}, \end{cases} \quad (2)$$

где Δt – шаг дискретизации модели (временной интервал между k и $k + 1$ измерениями); $\varepsilon_{\omega k}$ и ε_{vk} – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием, среднеквадратичное отклонение шума можно варьировать, в зависимости от погрешности измерений GPS-датчиков.

Определим для нашей модели матрицы, представленные на рисунке 1, описывающие динамику системы и измерений F , B , P , Q , R и H [5, 6].

Представим дискретную динамическую модель в матричной форме (матрица переходов между состояниями), более удобной для реализации при расчетах РФК с учетом процедуры линеаризации, реализуемой с помощью матрицы Якоби (3).

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v \cdot \Delta t \cdot \sin \eta & \Delta t \cdot \cos \eta & 0 \\ 0 & 1 & v \cdot \Delta t \cdot \cos \eta & \Delta t \cdot \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{\Delta t} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Delta t} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

P – квадратная матрица ошибки ковариации, порядок матрицы определяется размером вектора состояния. Значения матрицы формируются на основе вектора состояния и матрицы динамики системы и обновляются на каждом шаге пересчета алгоритма. Эта матрица определяет «уверенность» фильтра в оценке переменных состояния. В качестве начальных значений необходимо сделать предположение о исходном векторе состояний. Как правило, для начального состояния значения ковариации между переменными неизвестны, поэтому, обычно элементы матрицы, расположенные вне главной диагонали обнуляются. Начальные значения на главной диагонали можно задать в соответствии с характеристиками датчиков, например, среднеквадратичное отклонение измерений, но, в отсутствие таких данных, установим их равными 2. В процесс расчета эти значения будут уточнены и обновлены (5).

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

R – квадратная матрица ковариации шума измерений, порядок матрицы определяется размером вектора измерения (количеству измеряемых параметров). Так как измерения независимы, то можно допустить, что они не коррелируют друг с другом, то есть матрица R – диагональная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю. В качестве диагональных элементов, в качестве допущения, можно установить значения дисперсии для каждой измеряемой величины. Эти данные устанавливаются в соответствии с документацией к используемым датчикам. Если справочной информации нет, то можно воспользоваться правилом трёх сигм (6).

$$R = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Q – квадратная матрица ковариации шумов процесса, порядок матрицы равен размеру вектора состояния (7). При выборе значений для формирования матрицы необходимо учитывать их влияние на изменение неопределенности оценки.

$$Q = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для обновления оценки с учетом измерений (8) используются данные вектора измерений z .

$$x_k = \tilde{x}_k + F_k(z_k - H \cdot \tilde{x}_k), \quad (8)$$

где z_k – вектор измерения с учетом ошибок. Это значения, получаемые с датчиков системы, подвержены случайным возмущениям или шумам. Так как в задаче рассматривается случай движения на плоскости, вектор измерений можно представить:

$$z_k = \begin{bmatrix} X_{GPS} \\ Y_{GPS} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

$H \cdot \tilde{x}_k$ – модель, связывающая вектор предсказанного состояния $\tilde{x}_k$ с показаниями датчиков. При этом H – матрица измерений, в качестве элементов матрицы выступают измеряемые координаты:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

I – матрица идентичности, используется для обновления матрицы ошибок ковариации измерения.

Для реализации алгоритма РФК в качестве основного языка программирования был выбран C++. Для работы с линейной алгеброй использовалась библиотека Eigen. Разработка фильтра выполняется на ОС Ubuntu. В качестве входных данных используем сгенерированные GPS координаты тела в формате CSV.

Фрагмент кода основной функции приведен на рисунке 2.

```
#include "inc.hpp"
int main()
{
    ExtendedKalmanFilter EKF(600);
    EKF.LoadGpsFromCSV("путь к CSV файлу с измерениями ");
    EKF.RunEKF();
    EKF.ExportGpsToCSV("путь к CSV файлу с результатом");
    plot_gps_trajectory("путь к CSV файлу с измерениями ");
    createOverlayPlot("путь к CSV файлу с измерениями", "путь к
    CSV файлу с результатом");
}
```

Рисунок 2. Фрагмент кода основной функции

Код функции, реализующей расширенный фильтр Калмана, включает в себя следующие блоки:

- инициализация матриц P , Q , R , H ;
- подготовка графической области для вывода результатов;
- расчет основных параметров на этапе прогноза: формирование Якобиана, матрицы влияния шума управления, обновление матрицы ковариации;
- расчет основных параметров на этапе коррекции: вычисление усиления фильтра, считывание данных о координатах из файла, обновление оценки с учетом измерений, обновление ошибки ковариации;
- вывод графических результатов.

На рисунках 3, 4 представлено сравнение траектории тела до и после работы фильтра. Все графики были построены при помощи утилиты GNUPLOT.

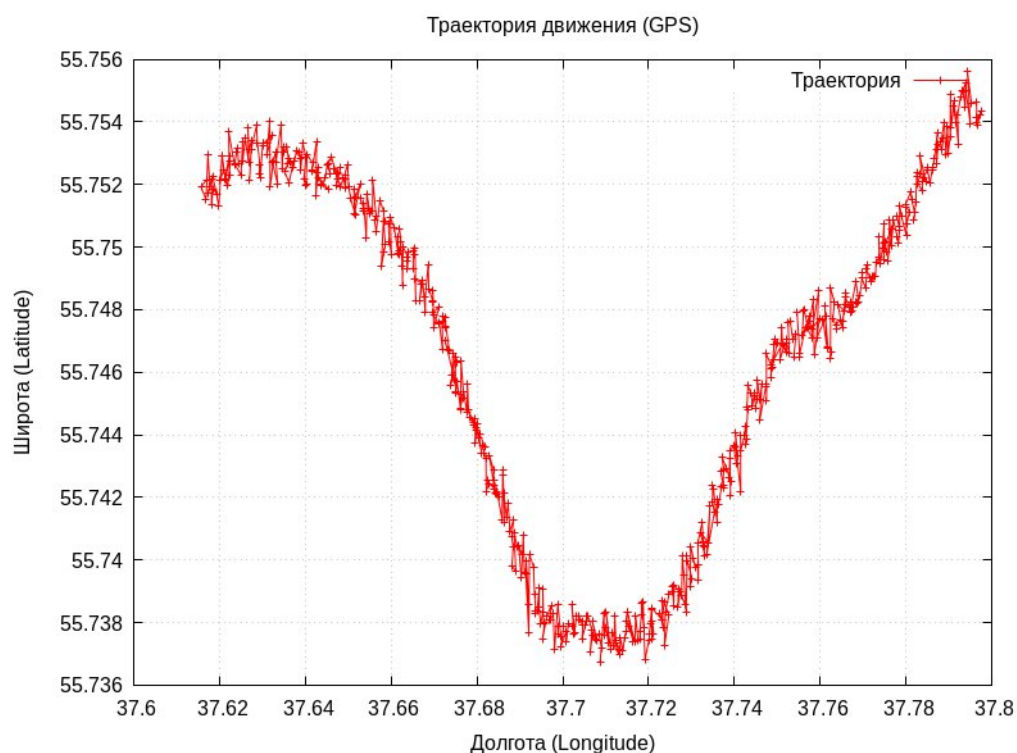


Рисунок 3. Траектория тела по показаниям датчика

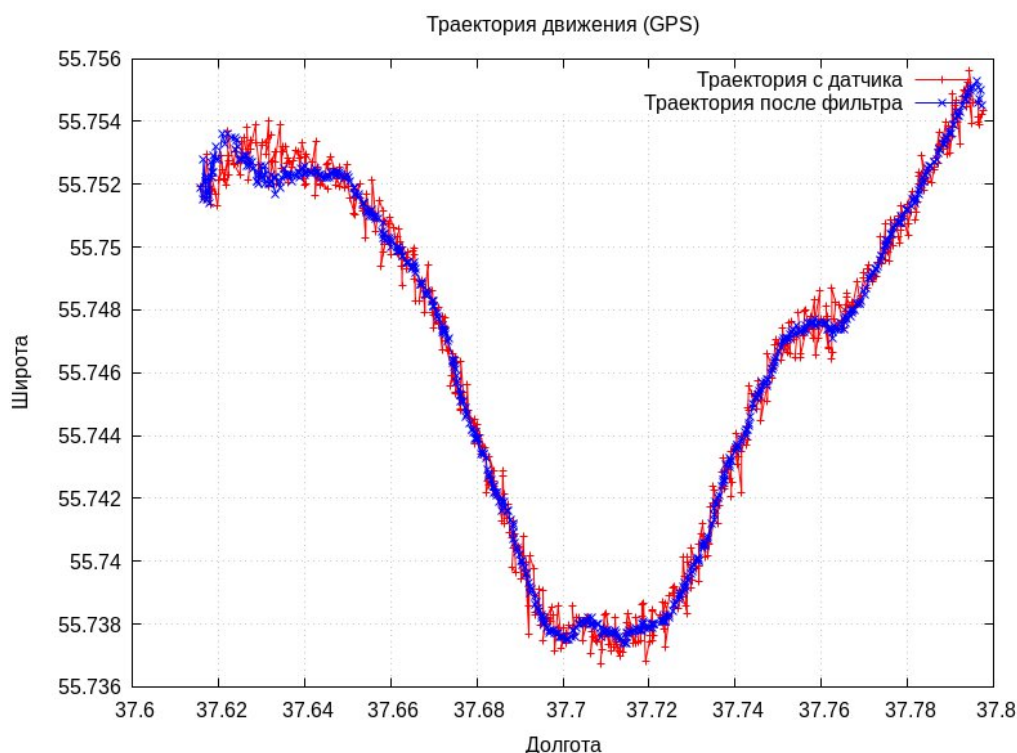


Рисунок 4. Сравнение траекторий движения тела

В ходе работы была рассмотрена задача оценки состояния движущегося объекта по данным GPS-навигации, содержащим шум, с использованием расширенного фильтра Калмана. Получена нелинейная модель объекта в виде системы дифференциальных

уравнений, описывающих эволюцию координат, скорости и угла направления движения. Выполнена дискретизация модели и реализована процедура линеаризации с использованием матрицы Якоби, что позволило применить метод расширенного фильтра Калмана. Разработан программный модуль на языке C++, реализующий ЕKF, с возможностью загрузки GPS-данных из файла и сохранения отфильтрованной траектории. Полученные результаты подтверждают актуальность применения методов фильтрации в задачах, связанных с обработкой реальных измерений, и демонстрируют эффективность математического моделирования в системах навигации.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Машаров К.В. Применение фильтра Калмана для оценки координат цели в РЛС / К.В. Машаров // Вестник СибГУТИ. – 2011. – № 3 (15). – С. 59–66.
2. Товстик Т.М. Линейный фильтр Калмана-Бьюси с векторными авторегрессионными сигналом и шумом / Т.М. Товстик // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2021. – Т. 8, № 1. – С. 111–122.
3. Лемешко О.В. Фильтр Калмана. Теоретические основы и практическое применение / О.В. Лемешко // Вестник магистратуры. – 2014. – № 6-1 (33). – С. 5–8.
4. Гаврилов А.В. Использование фильтра Калмана для решения задач уточнения координат БПЛА / А.В. Гаврилов // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1-1. – URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=19453> (дата обращения: 26.05.2025).
5. Сложная информационная система прогнозирования рисков с применением фильтра Калмана-Бьюси / Е.П. Истомин, В.В. Новиков, О.Н. Колбина [и др.] // Ученые записки Российского государственного гидрометеорологического университета. – 2014. – № 36. – С. 183–188.
6. Реализация метода для защиты пространственных данных ГИС на основе нейронной сети / Т.М. Татарникова, А.Ю. Сидоренко, С.Ю. Степанов, Я.А. Петров // Естественные и технические науки. – 2020. – № 1 (139). – С. 134–136.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Белоусов Константин Алексеевич, студент 4-го курса, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.
e-mail: belouskostya783@gmail.com

Шипилова Елена Алексеевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теории функции и геометрии, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.
e-mail: elen_ship@list.ru