УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

©2022 Ю. В. Гарбзова, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

В работе исследуется краевая задача в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Уравнение содержит специальные весовые производные до порядка 2m и обычные частные производные до порядка 2k ´ 1. Предполагается, что 2m ą 2k ´ 1. На границе t “ 0 ставятся граничные условия общего вида, а на границе t “ d ставятся однородные условия Дирихле. В работе доказана теорема о существовании и единственности решения такой краевой задачи. При определенных условиях доказано, что это решение принадлежит специальному весовому пространству типа пространства С. Л. Соболева.

Ключевые слова: теорема о существовании и единственности, вырождающееся эллиптическое уравнение, краевая задача, весовые пространства С. Л. Соболева.

Актуальность развития теории краевых задач для вырожденных эллиптических уравнений обусловлена их использованием при моделировании вырожденных процессов, то есть процессов, в которых процессы, происходящие вблизи границ, существенно отличаются от процессов, происходящих внутри предметной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.Z50.31.0037) и гранта РНФ 19-11-00197, NICH-19013, выполненного в Воронежском государственном университете.

Одна из основных трудностей, возникающих в теории вырожденных эллиптических уравнений, связана с влиянием вторичных (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку краевых задач и их принудительную разрешимость.

Изучение вырожденных эллиптических уравнений высокого порядка (с «степенным» характером вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1], [2].

В работе В. П. Глушко [3] были доказаны априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных.

В работах А. Д. Баева [4]-[6] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырожденных эллиптических уравнений высокого порядка с произвольным сильным вырождением.

В частности, краевые задачи в полосе были исследованы для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [7]-[8] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка.

В [10] были получены принудительные априорные оценки для одного эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе t " 0 в уравнение нечетного порядка.

В задаче Коши, рассмотренной выше, начальные условия, определяющие значения неизвестной функции и ее производных для фиксированного значения независимой переменной, задаются в качестве дополнительных условий. Однако начальные условия не являются единственной возможной формой дополнительных условий, которые подчеркивают конкретное конкретное решение. Во многих случаях граничные условия задаются в качестве дополнительных усло-

---

Гарбузова Юлия Владимировна – Воронежский государственный университет, аспирант, e-mail: 9999vlad9999@mail.ru.

Шабров Сергей Александрович – Воронежский государственный университет, доктор физ.-мат. н., доцент.

вий, определяющих значения неизвестной функции и ее производных (или некоторых выражений от них) для нескольких фиксированных значений независимой переменной. Задача определения конкретного решения задачи, удовлетворяющей заданным граничным условиям, будет называться краевой задачей.

Многие физические задачи сводятся к краевым задачам для DU. Например, в задаче о движении материальной точки массой m под действием заданной силы $\mathbf{F}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ часто необходимо найти закон движения, если в начальный момент t = t0 точка находилась в положении, характеризуемом радиус-вектором r0, и в момент t = t1 она должна попасть в точку r = r1.

Задача сводится к интегрированию скорости движения:

$$m\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0\,,\ \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1.$$

Обратите внимание, что эта проблема, вообще говоря, не имеет единственного решения: тело может попасть в одну и ту же точку по разным траекториям.

Простейшие случаи понижения порядка DU.

Давайте рассмотрим простейшие случаи, в которых порядок DU может быть понижен. Давайте ограничимся ДУ второго порядка.

1. y'' = f(x) является простейшим случаем DU второго порядка. Интегрируясь один раз, мы найдем

Интегрируясь снова, мы найдем общее решение для:

ПРИМЕР 1. Решите задачу Коши: y'' =sinx, y(0) = y'(0) = 0.

Из начального условия y'(0) = 0 ⇒ C1=1.

Из начального условия y(0) = 0 ⇒ C2=0.

Поэтому решение задачи Коши выглядит так: y = x - sinx.

1. F(x, y', y'') = 0, то есть уравнение не содержит y.

Замена y' = z(x) сводит это уравнение к уравнению первого порядка.

ПРИМЕР 2. Решите задачу Коши: y''+(1/x)y' = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1.

Давайте заменим неизвестную функцию, предположив, что y' = z(x). Мы получаем следующий DU первого порядка с общими переменными:

Мы интегрируем это уравнение:

Из начального условия y'(1) = z(1) =1 C1= 1. То есть y' = 1/x. Интегрируясь снова, мы получаем:

$$y = \ln|x| + C_2.$$

Из начального условия y(1) = 0 ⇒ C2 = 0 и решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \ln x.$$

3) F(y, y', y'') = 0, то есть уравнение не содержит x.

В этом случае вы можете понизить порядок пульта дистанционного управления, заменив:

$$y' = p(y).$$

Дифференцируя p(y) в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции, мы получаем переводы.

Грамматика решений поддерживает формулировку задач с использованием нескольких универсальных интерфейсов. Графическая нотация, как и в традиционных графических моделях принятия решений, отвечает за визуализацию на нескольких уровнях представления.

Математическое представление обеспечивает краткую формулировку проблемы принятия решений; оно также допускает несколько методов решения в зависимости от различных свойств формальной модели.

Эффективный язык для моделирования динамического принятия решений в условиях неопределенности должен обеспечивать разделение поддержки представления и вывода данных для моделирования и для расчетов или задач принятия решений, а также поддерживать баланс между наглядностью модели и эффективностью принятия решений.

Он также должен иметь выразительную онтологию принятия решений и формальную основу, он должен поддерживать несколько уровней абстракции, несколько перспектив визуализации, а также быть расширяемым, адаптируемым и практичным.

Языковая парадигма должна включать факторы принятия решений и ограничения, присущие всем существующим структурам моделей принятия решений.

Словарь должен облегчать формулировку задачи; другими словами, выразительность, краткость и ясность являются наиболее важными качествами языка.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ высших порядков. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде F (x; y; y’; y”) = 0 или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y'' = f(x; y; y').$$

Решением последнего ДУ называется всякая функция y = φ (x), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ называется функция $y = \varphi(x; c_1; c_2)$, где c_1 и c_2 – не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x; c_1; c_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения c_1 и c_2 .

2. Каковы бы ни были начальные условия $y\,|_{x = x0} = y_0$, $y'\,|_{x = x0} = y'_0$, существуют единственные значения постоянных $c_1 = c_1^0$ и $c_2 = c_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ является решением уравнения y” = f (x; y; y’) и удовлетворяет начальным условиям.

Всякое решение $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ уравнения y” = f (x; y; y’), получающееся из общего решения $y = \varphi(x; c_1; c_2)$ при конкретных значениям постоянных $c_1 = c_1^0$, $c_2 = c_2^0$, называется частным решением.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ y” = f (x; y; y’), удовлетворяющего заданным начальным условиям $y\,|_{x = x0} = y_0$, $y'\,|_{x = x0} = y'_0$, называется задачей Коши.

Теорема существования и единственности задачи Коши: если в уравнении y” = f (x; y; y’) функция f (x; y; y’) и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y’, то для всякой точки $(x_0; y_0; y'_0)$ Э D существует единственное решение y = φ (x) уравнения y” = f (x; y; y’), удовлетворяющее начальным условиям $y\,|_{x = x0} = y_0$, $y'\,|_{x = x0} = y'_0$.

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является метод понижения порядка. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

3 типа уравнений, допускающих понижение порядка:

1) y” = f (x);

2) y” = f (x; y’), не содержащее явно искомой функции y.

Частный случай: y” = f (y’), не содержащее также и независимую переменную x.

3) y” = f (y; y’), которое не содержит явно независимой переменной x.

Частный случай: y” = f (y).

При решении задачи Коши для уравнений высших порядков бывает целесообразно определять значения постоянных C_i в процессе решения, а не после нахождения общего решения уравнения. Это связано с тем, что интегрирование порой значительно упрощается, когда постоянные C_i принимают конкретные числовые значения, в то время как при произвольных C_i интегрирование затруднительно, а то и вообще невозможно в элементарных функциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. – 1969. – Т. 80 (112), вып. 4. – С. 455-491.

2. Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25, вып. 4. – С. 29-56.

3. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. –Деп. в ВИНИТИ 27.03.79. – № 1048-79.

4. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. – 1982. – Т. 265. – № 5. – С. 1044-1046.

5. Баев А. Д. Качественные методы тео-

рии краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

6. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 422. – № 6. – С. 727-728.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF HIGH-ORDER EQUATIONS

©2022 Yu. V. Garbuzova, S. A. Shabrov

Voronezh State University (Voronezh, Russia)

Abstract. In this paper, we investigate a boundary value problem in the band for a degenerate high-order elliptic equation. The equation contains special weight derivatives up to order 2m and ordinary partial derivatives up to order 2k ´ 1. It is assumed that 2m ą 2k ´ 1. General boundary conditions are set on the boundary t “0, and homogeneous Dirichlet conditions are set on the boundary t “d. In this paper we prove a theorem on the existence and uniqueness of the solution of such a boundary value problem. Under certain conditions, it is proved that this solution belongs to a special weight space of The Sobolev space type.

Keywords: Existence and uniqueness theorem, degenerate elliptic equation, boundary value problem, weight spaces Of S. L. Sobolev.