УДК517.95

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

© 2022 В. В. Гарбузов, С. А. Шабров

Воронежский институт высоких технологий (Воронеж, Россия)
Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

В этой статье рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа и приводится лемма для решения задачи, которая далее используется для доказательства устойчивости разностной модели, построенной для этой краевой задачи. Построены разностные схемы для дифференциальных задач. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

Ключевые слова:краевые задачи, априорная оценка, нагруженные уравнения, разностная схема, псевдопараболическое уравнение, уравнение влагопереноса, уравнение Аллера, дробная производная Капуто.

В настоящее время наблюдается повышенное внимание исследователей к фрактальному анализу, дробному исчислению, а также разработке методов решения начально-краевых задач для уравнений, которые выступают в качестве математических моделей процессов переноса в средах с фрактальной структурой. Существуют различные определения фрактала.

Более физическим и визуальным является определение Б. Мандельброт – это определение фрактала как структуры, состоящей из частей, которые в некотором смысле похожи на целое, образно говоря, выглядят одинаково, независимо от масштаба, в котором это наблюдается. Математические модели процессов фильтрации в пористых средах с фрактальной организацией и памятью основаны на дробных дифференциальных уравнениях как временных, так и пространственных переменных и их разностных аналогах. Высокопористые среды, такие как, например, почвенный субстрат, образуют эффективное поровое пространство, которое является примером системы, близкой к фрактальной. Одной из наиболее важных характеристик почв, влияющих практически на все свойства почвы, является их влажность. Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности может существенно повлиять на процесс нестационарного движения влаги в этой капиллярно-пористой среде. Общеизвестно, что решение многих практически важных задач, возникающих при изучении процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, которая потока грунтовых вод со свободной поверхностью в многослойных средах, влагу транспорта, тепло – соль в пористых средах связан с необходимостью изучения краевых задач для псевдопараболических уравнений:

ут = (к(Х, Т), уб)х + (η(Х, Т), уб)х +
+ р(х, Т)УБ − м(х, Т)U(х, т) + ф(х, t).

Нагруженными дифференциальными уравнениями называются уравнения, содержащие функции из решения на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции.

Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают при изучении движения подземных вод, в задачах управления качеством воды, когда загрязнитель определенной интенсивности поступает в резервуар из n источников, при построении математической модели перено-

Гарбузов ВладиславВладимирович – Воронежский институт высоких технологий, преподаватель, e-mail: 9999vlad9999@mail.ru.
Шабров Сергей Александрович – Воронежский государственный университет, доктор физ.-мат. н., доцент.

са рассеянных загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы. Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений.

Проблемы расчета тепло и массообмена с концентрированными источниками (стоками) переносимого вещества и проблемы регулирования уровня грунтовых вод при орошении приводят к необходимости изучения краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений.

Также исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

С помощью метода Римана доказано существование и единственность классического решения исследуемой задачи.

Работы посвящены численным методам решения некоторых нагруженных дифференциальных уравнений.

Краевые задачи для нагруженных обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных исследуются методом конечных разностей.

Работа посвящена численному решению нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматривается краевая задача относительно параболического уравнения с различными вариантами точечного нагружения. Используя методы разностной аппроксимации, рассматриваемые задачи сводятся к системам алгебраических уравнений специальной структуры, для решения которых предлагается параметрическое представление с использованием решений вспомогательных линейных систем с трехдиагональными матрицами.

При построении априорных оценок мы используем метод интегральных («энергетических») неравенств, который широко используется в теории дифференциальных уравнений, а также метод выделения «стационарных» неоднородностей, для которых оценки получаются особенно точными, поскольку при их построении используется функция Грина Поста. В то же время мы уделяем особое внимание выбору нормы для оценки правой части и смягчению требований к коэффициентам уравнения. Некоторые из простейших неравенств, были найдены в работах других авторов, однако они были получены для разностных схем определенного типа и для гораздо более узкого класса коэффициентов и граничных условий 1-го рода, что делало их непригодными для наших целей.

Напишем схему переменных направлений для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad (x, t) \in Q_T,$$
$$u\,|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$
$$Lu = L_1 u + L_2 u,$$
$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$
$$k_\alpha(x, t) > 0.$$

Напомним, что в случае одномерного уравнения теплопроводности неявная схема на каждом слое приводит к разностной краевой задаче вида

$$\left.\begin{aligned} & A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, i = 1,\dots,N-1, \\ & y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2, A_i > 0, B_i > 0, \\ & C_i \ge A_i + B_i, \end{aligned}\right\},$$

$$O(\frac{1}{h}) = O(N)$$

которая решается стандартным методом прогонки с затратой числа действий, пропорционального числу узлов сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \le i \le N\}.$$

Обратимся к двумерной задаче в прямоугольнике. Сетку можно представить, как совокупность узлов, расположенных на строках или как совокупность узлов, расположенных на столбцах. Всего имеется столбцов и строк. Число узлов в каждой строке равно, а в каждом столбце имеется узлов.

Если на каждой строке (или столбце) решать задачу вида методом прогонки при фиксированном (или), то для отыскания решения на всех строках (или столбцах), т. е. во всех узлах сетки, понадобится число арифметических действий, пропорциональное числу узлов двумерной сетки. Основная идея большинства экономичных методов состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач вдоль строк и вдоль столбцов.

$$\bar{y} = y^{n+1/2}\; t = t_{n+1/2} = t_n + \frac{\tau}{2}$$

Весьма четко эту алгоритмическую идею выражает неявная схема переменных направлений (продольно-поперечная схема), предложенная Писменом, Рекфордом и Дугласом в 1955 году. Наряду с основными значениями искомой сеточной функции, т. е. с, и вводится промежуточное значение, которое можно формально рассматривать как значение при. Переход от слоя к слою совершается в два этапа с шагами:

$$\frac{y^{n+\frac{1}{2}} - y^n}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^n + \varphi^n,$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi^n.$$

Эти уравнения пишутся во всех внутренних узлах сетки и для всех. Первая схема неявна по направлению и явна по, вторая схема явна по и неявна по. К уравнениям надо добавить начальные условия, и разностные краевые условия, например, в виде

$$y^{n+1} = \mu^{n+1} \quad \text{при} \quad i_2 = 0 \quad \text{и} \quad i_2 = N_2,$$
$$y^{n+1/2} = \bar{\mu} \quad \text{при} \quad i_1 = 0 \quad \text{и} \quad i_1 = N_1,$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}\left(\mu^{n+1} + \mu^n\right) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2\left(\mu^{n+1} - \mu^n\right).$$

В формулах меняется лишь формула для:

$$\Lambda_\alpha y = \Lambda_\alpha(\bar{t})\, y = \left(a_\alpha(x, \bar{t})\, y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha},$$
$$\alpha = 1, 2, \quad \bar{t} = t_n + 0{,}5\tau,$$

что обеспечивает второй порядок аппроксимации для:

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O\left(h_\alpha^2\right).$$

Для исследования устойчивости схемы проведем исключение промежуточного значения y. Вычитая из уравнения, находим,

$$2\bar{y} = \hat{y} + y - 0{,}5\tau\Lambda_2(\hat{y} - y), \quad x \in \omega_h.$$

Подставим:

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_2(\hat{y} - y) = \frac{1}{2}\Lambda_1(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(\hat{y} + y) + \Lambda_2 y + \varphi.$$

Учитывая, что, преобразуем к каноническому виду:

$$(\Lambda_1 \bar{y})_{\bar{t}}.$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что формула должна выполняться. То из формулы следует

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \mu) - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_2\mu_t = \bar{\mu}$$

при $x_1 = 0,\ x_1 = l_1,$ что совпадает с краевым условием. Тем самым доказано, что решение задачи удовлетворяет при дополнительных условиях:

$$y\,|_{\gamma_h} = \mu, \quad \hat{y}\,|_{\gamma_h} = \hat{\mu}, \quad y(x,\ 0) = u_0(x).$$

В самом деле, введем и подставим это выражение в уравнение. После несложных преобразований получим уравнение. Тем самым доказана эквивалентность задач. Она имеет место при согласованном задании граничных значений. Исследование схемы можно заменить исследованием полученной схемы «в целых шагах».

$$O(|h|^2 + \tau^2)$$

Все рассуждения, показывающие эквивалентность схем, в данном случае сохраняют силу. Схема имеет на решении аппроксимацию, если, кроме условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Однородные разностные схемы / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. –1. – № 1, 4-63.

2. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения / А. А. Самарский // Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям. (Ереван, 1958 г.) Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960, 148-160.

3. Тихонов А. Н. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1960. – 131. – № 3. – 514-517.

4. Самарский А. А. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа/ А. А. Самарский // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 3. – 441-460.

5. Самарский А. А. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффици-

ентами А. А. Самарский, И. В. Фрязинов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – 1. – № 5.

6. Lees M. Approximat e solutions of parabolic equationsM.Lees // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1959. – 7. – № 2. – 167-183.

A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM

© 2022 V. V. Garbuzov, S. A. Shabrov

Voronezh Institute of High Technologies (Voronezh, Russia)
Voronezh State University (Voronezh, Russia)

In this paper, a boundary value problem for a mixed-type equation is considered and a lemma is given for solving the problem, which is then used to prove the stability of the difference model constructed for this boundary value problem. Difference schemes for differential problems are constructed.
By the method of energy inequalities, a priori estimates of solutions to the problems under consideration in differential and difference interpretations are derived. The obtained a priori estimates imply uniqueness, stability of the solution according to the initial data and the right side, as well as convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at a rate equal to the order of approximation error.

Keywords: boundary value problems, a priori estimation, loaded equations, difference scheme, pseudo-parabolic equation, moisture transfer equation, Aller equation, Caputo fractional derivative.