УДК 621.396

Использование интегральных уравнений для расчета характеристик рассеяния металлических объектов

А.П. Преображенский✉, В.В. Маркин, А.О. Хацкелева, Ю.П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия

В работе проведено решение задачи, связанной с определением характеристик рассеяния металлических объектов на основе интегрального уравнения Фредгольма 1 рода. В ходе вывода уравнения, было показано, как оно формируется для объекта с произвольной формой и если объект рассматривается в виде тела вращения. Даны примеры расчета характеристик рассеяния для металлического цилиндра с переменным и постоянным радиусом.

Ключевые слова: электродинамический объект, ток, поле, интегральное уравнение, метод.

Using integral equations to calculate the scattering characteristics of metal objects

A.P. Preobrazhenskiy✉, V.V. Markin, A.O. Hatskeleva, Yu.P. Preobrazhenskiy

Voronezh Institute of High Technologies, Voronezh, Russia

The paper solves a problem related to determining the scattering characteristics of metal objects based on the Fredholm integral equation of the 1st kind. During the derivation of the equation, it was shown how it is formed for an object with an arbitrary shape and if the object is considered as a body of rotation. Examples of calculating the scattering characteristics for a metal cylinder with variable and constant radius are given.

Keywords: electrodynamic object, current, field, integral equation, method.

Разработка современных систем связи требует использования различных моделей и формализованных методов электродинамики. В некоторых случаях их применяют в системах автоматизированного проектирования [1]. Выбор конкретного метода для проведения электродинамического моделирования зависит от формы анализируемого объекта, его размеров, отражающих свойств и т.д. В резонансной области, когда размеры объектов сравнимы с длиной электромагнитной волны, проведение оценок рассеивающих свойств требует использования численных методов и аппарата интегральных уравнений [2].

Целью данной работы является проведение анализа возможностей использования интегральных уравнений Фредгольма первого рода для определения характеристик рассеяния металлических электродинамических объектов.

Рассмотрим задачу рассеяния [3, 4] электромагнитной волны $f(M)$ на металлическом объекте D, который ограничен поверхностью S. Чтобы вне данного объекта в области D_e провести расчет полного поля u, требуется, чтобы было получено решение краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta u + k^2 u = -f \text{ в } D, \\ u|_S = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(1/r), \text{ если } r \to \infty. \end{gathered} \tag{1}$$

В рассматриваемой формуле Δ – соответствует оператору Лапласа, κ – это волновое число. В ходе решения будем считать, что поверхность S соответствует критерию Ляпунова [5], а $f(M)$ является непрерывной функцией. Точка M лежит на поверхности S, которая окружает объект. В таком случае можно говорить единственном решении, которое будет определяться при помощи формулы Грина

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{\partial u}{\partial n}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} - u(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right]dS_P + \frac{1}{4\pi}\int_T f(P)\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}d\tau_P. \quad (2)$$

Кружок в интеграле в формуле (2) соответствует интегрированию по замкнутой поверхности. Следует учесть, что для точек M и P будет расстояние $R = R_{MP}$, функция $f(M)$ характеризуется носителем T. Точка P соответствует точке, в которой находится приемное устройство. Если учесть по полному полю $u(P)$ граничное условие, то (2) запишется так

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right]dS_P + F(M), \quad (3)$$

учитываем, что

$$F(M) = \frac{1}{4\pi}\int_T f(P)\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}d\tau_P.$$

Анализируя (3), видим, что если найдем функцию $\frac{\partial u}{\partial n}|_S$, то можно вне объекта в области D_e найти [6, 7] полное поле $u(M)$. Если осуществить перемещение точки M в область D, то придем к следующему интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\oint_S \left[\mu(P)\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\right]dS_P = -F(M). \quad (4)$$

В (4) $\mu(P)$ является некоторой функцией, которая задана на поверхности S. Следует отметить, что в таком уравнении будет разная размерность для области определения функции и правой части.

Поскольку была обозначена краевая задача, то уравнение (4) должно быть ей эквивалентно. Проведенный анализ показывает, что при осуществлении предела $M \to P$ соответствующие значения производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ могут рассматриваться как решение уравнения (1).

Покажем, что будет единственность непрерывного решения уравнения (4). Тогда необходимо продемонстрировать, что будет только тривиальное решение, соответствующее однородному уравнению

$$\oint_S [\mu(P)\psi(M,P)]dS_P = 0, M \in D, \quad (5)$$

с учетом

$$\psi(M,P) = \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}.$$

Предположим, что $\mu = \mu_0(P)$ является решением уравнения (4). В таком случае можно убедиться в равенстве нулю функции для области D

$$V(M) = \oint_S [\mu_0(P)\psi(M,P)]dS_P.$$

А если рассматривать D_e, то функция будет соответствовать условиям излучения в бесконечности, а также однородному [8, 9] уравнению Гельмгольца. В этой связи можно говорить о том, что в D_e будет $V(M) = 0$. Если провести анализ $\frac{\partial V}{\partial n}$ на S, то $\mu_0(P) \equiv 0$.

Это говорит о том, что в (4) будет единственность решения, а в (5) решение, которое тривиально. В таком случае можно говорить об эквивалентности (1) и (4). После того, как для (4) получено решение $\mu(P) \frac{\partial u}{\partial n}|_S$, его можно подставить в (3) и получить решение для (1).

Необходимо учитывать, что в (4) М может лежать в части D' области D. Например, M может находиться на поверхности Ляпунова. Проводя анализ представленного выше доказательства, можно показать, что будем иметь нулевое решение для (5) при $L_z(S)$. В таком случае будет замкнутость ядра (5) $\psi(M, P)$ в $L_z(S)$.

Пусть внутри D при центре в точке O рассматривается сферическая система координат. Считаем, что $P \in S$, M лежит внутри шара. Основываясь для цилиндрических функций на теореме сложения и для сферических функций условий полноты, от (5) перейдем к

$$\oint_S [\frac{H^1_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(cos\theta) e^{\pm im\varphi} \mu(P)] dS = 0, \quad (6)$$
$$n = 0,1,2,\dots,\infty, m = 0,1,2,\dots, n.$$

В данном выражении $H^1_{n+1/2}(kr)$ – это функция Ханкеля первого рода, $P_n^{(m)}(kr)$ – это полином Лежандра [10]. Видно, что для системы металлических функций в уравнении Гельмгольца удовлетворяется условие замкнутости и полноты в $L_z(S)$ при любой поверхности Ляпунова. Кроме того, для уравнения Гельмгольца от третьей краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta u + k^2 u = -f \text{ в } D_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu|_S = f(P)|_S, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(1/r), \text{ если } r \to \infty, \end{gathered} \quad (7)$$

можно прийти к уравнению первого рода. Для решения задачи (7) можно записать выражение

$$\begin{gathered} u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right] \psi(M, P) - \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} + h\psi\right] u \right\} dS_P, M \in D_e, \\ \psi(M, P) = \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}. \end{gathered} \quad (8)$$

Размещая в области D точку M, придем к интегральному уравнению

$$\oint_S \left\{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial n_P} + h\psi\right] \mathrm{u}(P) \right\} dS = \oint_S \left\{ \psi(M, P) \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} + h\psi\right] \right\} dS.$$

С учетом граничного условия получим

$$\begin{gathered} \oint_S \left\{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial n_P}(M, P) + h\psi\right] \mathrm{u}(P) \right\} dS, M \in D, \\ F(M) = \oint_S \{\psi(M, P) f(P)\} dS, M \in D. \end{gathered} \quad (9)$$

Для того, чтобы определить решение [11, 12], соответствующее (5) необходимо решение на S получить для (8). В таком случае эквивалентность (7) (9) вытекает из того, что в (9) будет решение единственным.

Покажем, что решение тривиально для

$$\oint_S \left\{\left[\frac{\partial \psi}{(\partial n_P}(M,P) + h\psi(M,P)\right]\mu(P)\right\} dS = 0, M \in D. \tag{10}$$

Например, обозначим такое решение, как $\mu_1(P)$ и сформируем выражение

$$V(M) = \oint_S \left\{\left[\frac{\partial \psi}{(\partial n_P}(M,P) + h\psi(M,P)\right]\mu_1(P)\right\} dS_P.$$

Основываясь на (10), справедливо $V(M) \equiv 0$ для D, на S имеем

$$[V] = 4\pi\mu_1(P),$$
$$\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] = -4\pi h(P)\,\mu_1(P),$$

поэтому

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n} + hV\right] = 0.$$

Исходя из того, что $V(M) \equiv 0$, то при анализе D_e получим краевую задачу

$$\begin{gathered} \Delta V + k^2 V = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial n} + hV|_S = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial r} - ikV = o(1/r), \text{ если } r \to \infty. \end{gathered} \tag{11}$$

Можно установить, что $V(M) \equiv 0$ для D_e вследствие того, что справедлива теорема единственности. В этой связи на S будет выполняться условие

$$\mu_1(P) = 0.$$

Поэтому можно говорить о единственности решения (9), а для (10) приходим к решению, которое будет тривиальным. Если провести решение уравнения (9), то тогда краевая задача (7) может быть решена с учетом использования формулы Грина (8). Полнота и замкнутость следующих функций вытекает из того, что будет единственное решение в (9)

$$\{\frac{\partial}{\partial n} + h\}\frac{H^1_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^{(m)}(cos\theta)\, e^{\pm im\varphi},$$
$$n = 0,1,2,\dots,\infty,\ m = 0,1,2,\dots,n.$$

От двумерного интегрального уравнения можно перейти к одномерному интегральному уравнению [13, 14]. Тогда в ходе вычислений потребуется заметно меньшее число действий. Это будет наблюдаться, когда подынтегральная функция зависит не от двух, а от одной переменной, что, например, соответствует телу вращения. Покажем, как вывести соответствующее интегральное уравнение. Пусть существует некоторая ось z, вокруг которой происходит вращение кривой C. Тогда будет образовываться поверхность S.

Если для цилиндрических функций реализовывать теорему сложения [15, 16], то получим такие соотношения

$$\oint_S \mu(P)\left[\frac{H^1_{n\prime+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n\prime}(cos\theta)\, e^{\pm im\varphi} \mu(P)\right] dS = F^{\pm m}_n,$$
$$n\prime = 0,1,2,\ldots,\infty,\ m = 0,1,2,\ldots,n\prime, \tag{12}$$

мы ввели такое обозначение для выражения

$$F^{\pm m}_n = \oint_S f(P) \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{H^1_{n\prime+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_n(cos\theta)\, e^{\pm im\varphi}\right\} dS,$$

если рассматривать точку P, то ей будут соответствовать сферические координаты r, θ и φ. Используем ряд Фурье для того, чтобы относительно угла φ провести разложение функции

$$\mu(P)|_S = \sum_{m=-\infty\infty}^{\infty} \mu_m(L_1)\, e^{im\varphi},$$

используется цилиндрическая система координат ρ, φ, z, для объекта вращения L_1 соответствует длине образующей, есть зависимость от L_1 координат ρ и z. Исходя из того, что

$$dS = \rho, dL_1 d\varphi,$$

можно представить (12) таким образом

$$\int_C \mu_{\pm m}(L_1) \frac{H^1_{n\prime+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n\prime}(cos\theta)\, \rho\, dL_1 = F^m_{n\prime},$$
$$n\prime = 0,1,2,\ldots,\infty,\ m = 0,1,2,\ldots,n\prime, \tag{13}$$
$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},\ cos\theta = z/\sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Проведем замену $n = n' - m$, тогда (12) представим как

$$\int_C \mu_{\pm m}(L_1) \frac{H^1_{n+m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n+m}(cos\theta)\, \rho dL_1 = F^m_{n+m}, \tag{14}$$

здесь $n = 0,1,2,\ldots,\infty$, $m = 0,1,2,\ldots,\infty$.

Если рассматривать на оси вращения z точку M и она будет иметь координату ξ, то тогда можно (14) умножить на следующее выражение и провести суммирование по $n = 0,1,2,\ldots,\infty$

$$\frac{(-1)^m\, 2^{2m+1/2}\Gamma(m+1/2)\, k^{-(m+1/2)}}{(2m)!}(m+n+1/2)\frac{J_{n+m+\frac{1}{2}}(k\,\xi)}{\xi^{n+1/2}}.$$

В данном выражении Γ является гамма-функцией Гаусса [10]. Кроме того, необходимо учесть обобщенную теорему сложения

$$r^m \frac{H^1_{n\prime+1/2}(kR)}{R^{n+1/2}} = (-1)^m \frac{2^{n+1/2} m!\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2m)!k^{(m+1/2)}} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty}(n+m+1/2)\frac{J_{n+m+\frac{1}{2}}(k\,\xi)}{\xi^{n+1/2}} \frac{H^1_{n+m+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P^{(m)}_{n+m}(cos\theta),$$

если $\xi < r$, $R = \sqrt{\rho^2 + \xi^2 - 2r\xi cos\theta} = \sqrt{\rho^2 + (z-\xi)^2}$. В таком случае придем к следующему представлению интегрального уравнения первого рода [17]:

$$\int_C \mu_{\pm m}(L_1) \frac{H^1_{m+1/2}(kR)}{R^{m+1/2}} r^m \rho \, dL_1 = F_{\pm m}(\xi), \quad m = 0,1,2,\dots,\infty, \tag{15}$$

при этом

$$F_{\pm m}(\xi) = \int_C f_{\pm m}(L_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{H^1_{m+1/2}(kR)}{R^{m+1/2}} r^m \rho dL_1,$$

здесь первый сомножитель под интегралом при рассмотрении поверхности S соответствует коэффициенту Фурье функции $f(L_1)$, то есть

$$f(P)|_S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(L_1) \, e^{im\varphi}.$$

Для того, чтобы решать сформированное интегральное уравнение, при определении токов на поверхности металлического объекта предлагается использовать метод моментов [17]. За счет такого подхода возникают возможности для того, чтобы неизвестные токи были интерполированы и экстраполированы на базе полиномов. В качестве базисных функций предлагается применять кусочно-линейные функции, в качестве пробных функций – гармонические функции. Если удалось определить токи на поверхности объекта, то далее для осуществления расчетов рассеянных полей можно использовать интеграл Кирхгофа [13].

Были проведены расчеты диаграммы обратного рассеяния на основе сформированных уравнений Фредгольма первого рода для: 1) цилиндра с уравнением контура $r = r(\varphi) = 2 + cos(3\varphi)$, 2) цилиндра с радиусом $r = 3{,}5\lambda$, где λ – длина электромагнитной волны. Для первого случая минимальное значение диаграммы рассеяния равно 1, максимальное значение равно 3. Оптимальное число узлов разбиения в ходе решения равно 300. Для второго случая, среднее значение диаграммы рассеяния соответствует $1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Заключение. В работе проведено решение задачи, в которой, исходя из уравнения Гельмгольца, были сформированы интегральные уравнения. Они соответствовали объектам, которые являются идеально проводящими. При выводе уравнений учитывались граничные условия на поверхности объекта. Показана возможность перехода от двумерного к одномерному представлению. Дана оценка характеристик рассеяния в ходе решения интегрального уравнения методом моментов и использовании приближения Стрэттона-Чу.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Курушин А. Моделирование больших объектов в программной среде FEKO / А. Курушин, И. Мюхкеря, С. Подковырин // Электроника: Наука, технология, бизнес. – 2016. – № 7 (157). – С. 98-103.

2. Юденков А.В. Устойчивость систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши / А.В. Юденков, А.М. Володченков, Л.П. Римская // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2020. – Т. 14. – № 9. – С. 48-55.

3. Унгер А.Ю. Анализ возможностей пассивной радиолокации при работе в диапазоне ультракоротких волн / А.Ю. Унгер // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11. – № 2 (41). – URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1354 (дата обращения: 18.10.2024).

4. Аветисян Т.В. Проблемы дифракции радиоволн при проектировании электродинамических объектов / Т.В. Аветисян // Перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении: Сборник научных статей 2-й Всероссийской научно-технической конференции. – Воронеж: ЗАО «Университетская книга», 2024. – С. 28-32.

5. Зевин А.А. Максимальные показатели Ляпунова и критерии устойчивости линейных систем с переменным запаздыванием / А.А. Зевин // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79. – № 1. – С. 3-13.

6. Бояркин В.А. Алгоритмизация расчета электродинамических структур на основе метода интегральных уравнений / В.А. Бояркин, Ю.П. Преображенский // Поколение будущего: Взгляд молодых ученых – 2023: Сборник научных статей 12-й Международной молодежной научной конференции. В 4-х томах. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2023. – С. 35-37.

7. Анализ особенностей распознавания трехмерных электродинамических объектов / Н.А. Бельков, К.С. Царев, А.С. Скобцова [и др.] // Актуальные проблемы инновационных систем информатизации и безопасности: Материалы международной научно-практической конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2024. – С. 35-38.

8. Васильева А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – 2-е изд., стереот. – Москва: Физматлит, 2002. – 160 с.

9. О возможностях моделирования рассеяния волн на объектах со сложной формой в ходе их проектирования / А.М. Бородай, Г.А. Белоусов, Д.С. Судаков [и др.] // Перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении: Сборник научных статей 2-й Всероссийской научно-технической конференции. – Воронеж: ЗАО «Университетская книга», 2024. – С. 90-93.

10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, Д. Липман, А. Мак Ниш [и др.]. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

11. Аветисян Т.В. Применение метода интегральных уравнений при проектировании электродинамических объектов / Т.В. Аветисян // Перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении: Сборник научных статей 2-й Всероссийской научно-технической конференции. – Воронеж: ЗАО «Университетская книга», 2024. – С. 25-28.

12. Львович А.И. Анализ особенностей методов расчета характеристик рассеяния радиоволн / А.И. Львович // Молодежь и системная модернизация страны: Сборник научных статей 7-й Международной научной конференции студентов и молодых ученых. В 5-ти томах. – Курск: Юго-Западный государственный университет, 2022. – Т. 3. – С. 396-399.

13. Кофнов О.В. Анализ решения интеграла Френеля-Кирхгофа применительно к задачам обработки изображений дифракционных картин / О.В. Кофнов, Е.Л. Лебедев, А.В. Михайленко // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2018. – № 1 (1). – С. 41-46.

14. Исламгалиев Д.В. Адсорбционный потенциал двойного электрического слоя на границе двухфазной среды / Д.В. Исламгалиев // Мониторинг. Наука и технологии. – 2022. – № 1 (51). – С. 47-57.

15. Аветисян Т.В. Моделирование процессов восстановления радиолокационных изображений / Т.В. Аветисян, М.В. Питолин, Ю.П. Преображенский // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2023. – Т. 11 – № 4 (43). – URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1399 (дата обращения: 18.10.2024).

16. Рой Р.И. Актуальность задачи формообразования малых тел со сниженными значениями эффективной площади рассеяния / Р.И. Рой, М.Ю. Куприков, А.А. Ниженко // Вестник Московского авиационного института. – 2012. – Т. 19. – № 3. – С. 170-174.

17. Усков И.А. Сравнение метода конечных разностей и метода коллокаций по определению критических сил стержней переменного сечения / И.А. Усков // Colloquium-Journal. – 2019. – № 16-2 (40). – С. 99-101.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Преображенский Андрей Петрович, доктор технических наук, профессор, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: app@vivt.ru

Маркин Виктор Викторович, студент, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: Marrkin__Vik10@yandex.ru

Хацкелева Алина Олеговна, студент, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: Alinka_22Hats@yandex.ru

Преображенский Юрий Петрович, кандидат технических наук, доцент, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: petrovich@vivt.ru