

УДК 004.738

## Исследование возможностей оптимального управления системой интернет вещей

А.П. Преображенский✉, Е.А. Фирсова, В.С. Стукалова, В.О. Телегина,  
Ю.П. Преображенский

*Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия*

*В работе рассмотрена задача управления системой интернет вещей с использованием синтеза оптимального модуля управления. В ходе формирования системы управления использовались основные положения вариационного исчисления. Даны рекомендации по обеспечению устойчивости системы интернет вещей. Определены значения параметра стабилизации при заданном ресурсе управления при разных значениях множителя Лагранжа.*

*Ключевые слова: интернет вещей, модуль, управление, оптимизация, модель.*

## The investigation of possibilities of optimal control of the Internet of Things system

A.P. Preobrazhenskiy✉, E.A. Firsova, V.S. Stukalova, V.O. Telegina,  
Yu.P. Preobrazhenskiy

*Voronezh Institute of High Technologies, Voronezh, Russia*

*The paper considers the problem of managing the Internet of Things system using the synthesis of an optimal control module. In the course of the formation of the control system, the basic provisions of the calculus of variations were used. Recommendations are given to ensure the stability of the Internet of Things system. The values of the stabilization parameter for a given control resource at different values of the Lagrange multiplier are determined.*

*Keywords: Internet of Things, module, management, optimization, model.*

Интернет вещей является распределенной сетью различных компонентов [1]. Наиболее часто данная технология используется в сельском хозяйстве, промышленности, умных домах. В состав системы интернет вещей входит множество компонентов, которые слабо связаны между собой. При рассмотрении компонентов можно увидеть, что они имеют разные характеристики, структуры и предназначены для решения разных задач. Система интернет вещей подвергается воздействию внешней среды, в которой она находится. Необходимо обеспечить ее устойчивую работу вследствие определенной открытости некоторых каналов в системе. Для управления может использоваться обратная связь, в которой находится модуль управления.

Цель статьи заключается в исследовании характеристик модуля управления системы интернет вещей для обеспечения ее стабилизации.

Для системы интернет вещей рассмотрим задачу формирования обратной связи, которая была бы оптимальной. Оптимальность рассматривается с точки зрения того, что если будут внешние воздействия [2], то для анализируемой системы вещей будет обеспечена наилучшая среди всех точность стабилизации.

В системе интернет вещей есть компоненты, параметры которых не зависят от времени, и есть такие, параметры которых зависят от времени [3]. Это учитывается в ходе построения математической модели такой системы:

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t). \quad (1)$$

В рассматриваемой модели  $x$  – вектор переменных в системе, который подвергается регулированию,  $u$  – управление,  $D = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\varphi(t)$  – возмущающее воздействие,  $A, B$  – матрицы коэффициентов.

Существует обратная связь в системе интернет вещей, которой соответствует уравнение

$$u = -W(D)x, \quad (2)$$

при этом  $W$  можно представить так, что  $u = W_1(D)x/W_2(D)x$ , а  $W_1(D)$  и  $W_2(D)$  являются соответствующими алгебраическими полиномами.

При определении оптимального управления в обратной связи необходимо найти оператор  $W(D)$ , который обеспечивал бы для функции  $x(t)$  наилучшее преобразование в  $u(t)$  с учетом наивысшей точности. В ходе построения операторов, которые являются лучшими в определенном смысле, не всегда существуют возможности для формирования удобного математического аппарата [4]. В этой связи необходимо опираться на корреляционную теорию [5] случайных процессов. Тогда за счет того, что в системе интернет вещей, описываемой на основе (1), используется управление на основе (2), приходим к уравнениям замкнутой системы:

$$[A(D) + B(D)DD]x = \varphi(t), \quad (3)$$

$$[A(D) + B(D)D]u = -W(D)\varphi(t), \quad (4)$$

для среднего квадрата решения уравнения будем иметь:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{d\omega}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}, \quad (5)$$

$$\sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{|W(j\omega)|^2 d\omega}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}. \quad (6)$$

Учитываем, что  $S_\varphi(\omega)$  является спектральной плотностью мощности случайного процесса  $\varphi(t)$ .

Далее, необходимо обеспечить управление, которое дает минимум  $\sigma_x^2$  с учетом того, что по ресурсу управления есть ограничение, но это будет в работе системы интернет вещей давать наилучшую точность в стабилизации [6].

Поскольку ограничение накладывается на средний квадрат управления  $\sigma_u^2$ , то для того, чтобы определить оптимальный оператор  $W(D)$ , требуется рассматривать изопериметрическую задачу вариационного исчисления. В таком случае будет идти поиск функции  $W(j\omega)$ , при которой минимизируется интеграл (5), если для (6) известно его значение.

$$m^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{(m^2 + |W(j\omega)|^2) d\omega}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}, \quad (7)$$

здесь используется для вычислений  $m^2$  – множитель Лагранжа [7, 8]. Принимая во внимание условие Лежандра, исходим из того, что  $m^2 > 0$ .

Рассмотрим интеграл (7). В нем по второму множителю первая вариация должна быть нулевой для того, чтобы условие минимального значения интеграла было выполнено [9]. Учитываем, что между  $W(j\omega)$  и  $S_\varphi$  нет связи. В таком случае

$$F = \frac{m^2}{|A(j\omega)+B(j\omega)W(j\omega)|^2} W(j\omega) = \frac{m^2+|W(j\omega)|^2 d\omega}{(A(j\omega)+B(j\omega)W(j\omega))(A(-j\omega)+B(-j\omega)W(-j\omega))}. \quad (8)$$

Справедливым является равенство

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial W(j\omega)} \delta W(j\omega) + \frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)} \delta W(-j\omega).$$

Первая вариация обращается в ноль, когда

$$\frac{\partial F}{\partial W(j\omega)} = 0 \text{ и } \frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)} = 0.$$

Тогда после вычисления первой производной получаем

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = -m^2 \frac{B(-j\omega)}{A(-j\omega)}. \quad (9)$$

Для оптимального модуля управления, к которому мы стремимся в системе интернет вещей, получаем выражение

$$U_{\text{опт}} = -\frac{m^2 B(-D)}{A(-D)} x. \quad (10)$$

Проводя воздействие модулем управления на систему интернет вещей (1), можно увидеть, что устойчивость такой системы будет неполной. То есть, при совместном рассмотрении (1) и (10), приходим к выражению

$$\begin{aligned} [A(D)A(-D) + m^2 B(D)B(-D)] x &= A(-D) \varphi(t), \\ [A(D)A(-D) + m^2 B(D)B(-D)] u &= m^2 B(-D) \varphi(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Критерий Гурвица не будет выполняться для анализируемого характеристического полинома [10]. Это вытекает из того, что корень будет удовлетворять уравнению для  $\lambda = \lambda_1 + j\lambda_2$ , если  $\lambda_1 < 0$ , и корень будет удовлетворять уравнению для  $-\lambda = \lambda_1' + j\lambda_2''$ , если  $\lambda_2' > 0$ . Это можно объяснить в (11) симметрией формулы.

То есть, нельзя рассматривать (10) в виде оптимального модуля управления в системе интернет вещей. Следует исходить из (2), которое будет соответствовать (7), но при этом устойчивость системы интернет вещей должна соблюдаться [11, 12]. Для решения такой задачи могут быть использованы разные подходы.

Проведем разработку алгоритма оптимального модуля управления для системы интернет вещей при условии, что  $B(D) = 1$ .

В ходе решения исходим из того, что используем дробно-линейную четную функцию, позволяющую для спектра мощности осуществлять процедуры аппроксимации:

$$S_{\varphi} = \frac{a_p \omega^{2p-2} + a_{p-1} \omega^{2p-4} + \dots + a_0}{b_q \omega^{2q} + b_{q-1} \omega^{2q-2} + \dots + b_0}. \quad (12)$$

После этого, основываясь на том, что от  $j\omega$  переходим к  $s$ , реализуем процесс факторизации

$$S_{\varphi}(s) = S_1(s)1(-s), \quad (13)$$

который приводит к симметричным множителям.

В (12) в знаменателе и числителе для многочленов требуется определить их корни. Тогда в первом сомножителе корни соответствуют  $\lambda_1 < 0$ , а во втором сомножителе корни соответствуют  $\lambda_1 > 0$ .

В ходе рассмотрения полинома

$$A(s)A(-s) + m^2 = G(s)G(-s) \quad (14)$$

будет происходить процедура факторизации. В (14) первый сомножитель будет соответствовать условию Гурвица, второй сомножитель не соответствует условию Гурвица. Этот полином подвергается процедуре сепарации, тогда приходим к выражению

$$\frac{A(s)}{G(-s)}S_1(s) = M_0 + M_+ + M_- \quad (15)$$

В нем  $M_0$  соответствует полиному, который будет целым. Для  $M_+$  и  $M_-$  полюса находятся в левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости [13], соответственно. Необходимо ввести дополнительное выражение

$$\Phi(s) = \frac{M_0 + M_+}{G(s)v}, \quad (16)$$

на базе которого оптимальный оператор системы интернет вещей записывается как

$$W(D) = A(D) - \frac{1}{\Phi(D)}. \quad (17)$$

Рассмотрим результаты синтеза оптимального модуля управления в системе интернет вещей. Если поведение системы интернет вещей описывается следующим законом

$$(D)x = u + \varphi(t), \quad (18)$$

то после осуществления процедуры факторизации по спектру будет получено выражение

$$\sigma_x^2 \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - s^2} = \sigma_\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha + s} \sigma_\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha - s}.$$

В таком случае в выражении (14)  $S(s) = 1/(\alpha + s)$ . Тип функции, описывающей модуль управления в системе интернет вещей не зависит от постоянных множителей. После осуществления процедуры факторизации по полиному

$$m^2 + A(s)A(-s) = m^2 - s^2 = (m + s)(m - s)$$

получается, что  $G(s) = m + s$ ,  $G(-s) = m - s$ . Процедура сепарации ведет к выделению правильных дробей и целой части

$$\frac{A(s)}{G(-s)}S_1(s) = \frac{-s}{(m-s)(\alpha+s)} = \frac{-m}{\alpha+m} \frac{1}{m-s} + \frac{\alpha}{m+\alpha} \frac{1}{\alpha+s}.$$

После преобразований получаем

$$M_0 = 0 \text{ и } M_+ = \frac{\alpha}{\alpha+m} \frac{1}{\alpha+s}.$$

Проведя расчет функции  $\Phi(s)$ , приходим к выражению

$$\Phi(s) = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)} = \frac{\alpha}{\alpha+m} \frac{1}{\alpha+s}.$$

Тогда для модуля управления системой интернет вещей, являющегося оптимальным и учитывающем воздействия внешней среды (параметр  $\alpha$ ) записываем выражение

$$u = - \left[ \frac{m}{\alpha} D + \frac{m(m+\alpha)}{\alpha} \right] x. \quad (19)$$

В (19) случайное внешнее воздействие  $\varphi(t)$  характеризуется корреляционной функцией

$$K_{\varphi}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau}, \quad (20)$$

которая связана с со спектром

$$S_{\varphi}(\omega) = \sigma_x^2 \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (21)$$

Если использовать полученный модуль управления (19) в обратной связи, то этому будет соответствовать следующее уравнение

$$(D + m)x = \frac{\alpha}{\alpha+m} \varphi. \quad (22)$$

Система интернет вещей становится устойчивой, для нее параметры будут

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{\alpha^2}{m(\alpha+m)} \\ \sigma_u^2 &= \frac{\alpha^2 m + 3\alpha m^2 + m^3}{(\alpha+m)^3} \end{aligned} \quad (23)$$

В случае ограничения сверху для ресурса управления в системе интернет вещей  $\sigma_u^2 \leq 0,7$ , основываясь на (23), значение множителя Лагранжа  $m^2 = 1,69$ . Тогда (19) представляется как

$$u = - [1,3D + 3]x,$$

и, с учетом ограничения по управлению, имеем  $\sigma_x^2 = 0,0632$ .

Анализ показал, что для модуля управления линейного вида  $u = -k_0 x$  и условия  $\sigma_u^2 \leq 0,7$  оптимальным будет модуль управления, удовлетворяющий выражению  $u = -2,33x$ , при этом  $\sigma_x^2 = 0,128$ . Далее определим, каким образом можно определить множители Лагранжа. При этом следует учитывать ограничения по управлению.

Пусть воздействие внешней среды описывается на основе гармонического закона

$$\varphi(e) = \sqrt{2} \sin(\beta t + \theta). \quad (24)$$

В качестве примера, если  $\beta = 0$ , то с учетом (11) можно получить

$$\sigma_x = \frac{|A(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2 |B(j\beta)|^2}. \quad (25)$$

$$\sigma_u = \frac{m^2 |B(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2 |B(j\beta)|^2}. \quad (26)$$

Эти выражения (25) и (26) дают возможности для построения кривой в координатах, где  $\sigma_x$  – по оси абсцисс, а  $\sigma_u$  – по оси ординат, а  $m^2$  – параметр. Наихудшей ситуацией будет такая, в которой функция  $M$  имеет наименьшее значение

$$M = |A(j\beta)|^2 + m^2 |B(j\beta)|^2. \quad (27)$$

Для нее ведется поиск  $\omega = \beta$ . Точка на кривой соответствует  $|A(j\beta)|$  и  $|B(j\beta)|$  и связанным с ними  $\sigma_x$  и  $\sigma_u$ . Меняя  $m^2$ , получаем другие точки. Например, (27) задается так

$$M = w^4 - w^2 + 1 + m^2(1 + w^2).$$

Чтобы определить минимальные значения, требуется взять производную и приравнять нулю. В таблице приведен пример вычисленных точек кривой.

Таблица

$m^2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	4	$\infty$
$\beta$	0,707	0,632	0,548	0,448	0,316	0	0	0
$\sigma_x$	0	0,217	0,341	0,43	0,471	0,5	0,8	1
$\sigma_u$	1,155	0,878	0,725	0,629	0,556	0,5	0,2	0

На рисунке показаны точки, которые лежат на кривой. Этой кривой можно пользоваться на практике следующим образом: при управлении системой интернет вещей можно определить значение параметра стабилизации  $\sigma_x$  при заданном ресурсе управления  $\sigma_u$  при разных значениях множителя Лагранжа.

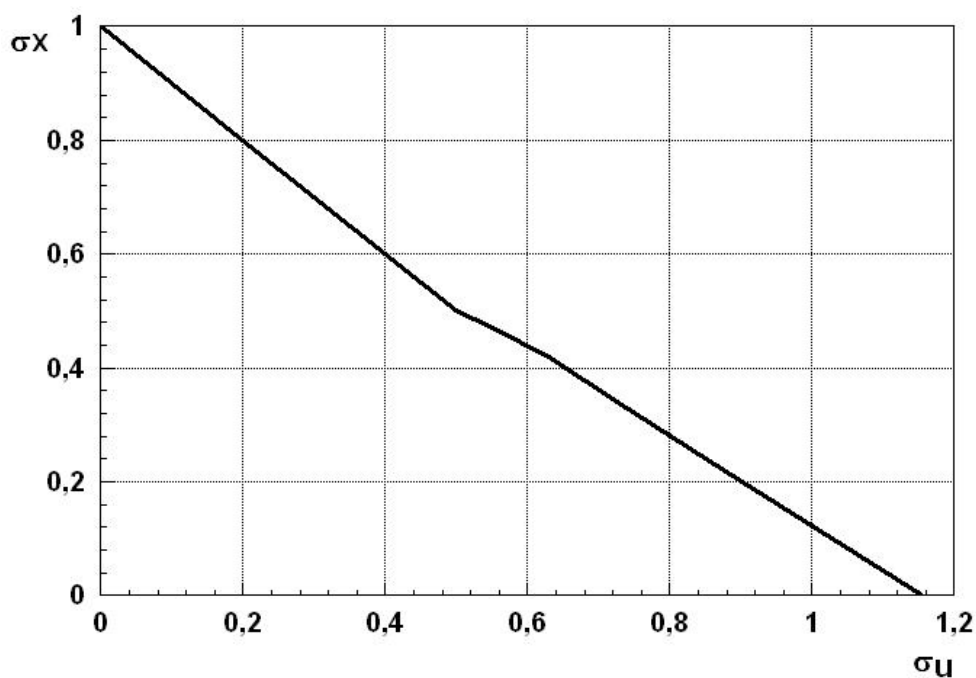


Рисунок. Зависимость параметра стабилизации  $\sigma_x$  от используемого ресурса  $\sigma_u$

**Заключение.** В работе решена задача, связанная с формированием оптимального модуля управления для системы интернет вещей. Проведено исследование зависимости параметра стабилизации системы интернет вещей от используемого ресурса. Показана зависимость параметров задачи от множителей Лагранжа в ходе оптимального управления.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Преображенский Ю.П. Анализ перспектив информационных технологий в сфере интернет вещей / Ю.П. Преображенский, О.А. Мясников // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2020. – Т. 14. – № 1 (32). – С. 43-45.
2. Ахмедьянова Г.Ф. Оптимальное управление организационно-технической системой с учетом интенсивности приложения управляющих воздействий / Г.Ф. Ахмедьянова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2024. – Т. 12. – № 1 (44). – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1497> (дата обращения: 16.11.2024).
3. Преображенский Ю.П. Проблемы управления процессами в компьютерных системах / Ю.П. Преображенский, Ю.Л. Чупринская, Е. Ружицкий // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2022. – Т. 16. – № 1 (40). – С. 92-94.
4. Подходы к прогнозированию изменения состояния обеспечивающих компонентов информационно-управляющей системы / Ю.С. Шевнина, П.Е. Рябов, С.В. Прокопчина [и др.] // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2024. – Т. 12. – № 2 (45). – URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1549> (дата обращения: 16.11.2024).
5. Тхабисимова М.М. О вероятностных свойствах поведения математической модели в рамках корреляционной теории / М.М. Тхабисимова, А.Р. Бечелова, М.Р. Яхутлова // Российская наука в современном мире: Сборник статей XXVIII международной научно-практической конференции. – Москва: ООО «Актуальность.РФ», 2020. – С. 85-87.
6. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: учебник для вузов / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Высшая школа, 2003. – 614 с.
7. Семькина Н.А. Методы теории оптимального управления в задачах защиты компьютерных систем от вирусных атак: учебное пособие / Н.А. Семькина. – Тверь: Тверской государственный университет, 2020. – 100 с.
8. Казаков В.А. Метод повышения эффективности кодовых систем связи с информационной обратной связью / В.А. Казаков, Л.Ф. Техеда Лопес // Известия высших учебных заведений. Радиотехника. – 2008. – Т. 51. – № 4. – С. 19-28.
9. Моделирование динамики звена экзоскелета переменной длины с использованием системы дифференциальных уравнений движения Лагранжа-Максвелла / А.О. Блинов, А.В. Борисов, Л.В. Кончина [и др.] // Прикладная информатика. – 2022. – Т. 17. – № 3 (99). – С. 117-130.
10. Отман Ш.А. Оптимальное управление нелинейных динамических систем на основе классического формализма Лагранжа / Ш.А. Отман // Символ науки: международный научный журнал. – 2021. – № 3. – С. 7-12.
11. Мишин А.В. Методика применения критерия Гурвица для выбора варианта системы безопасности / А.В. Мишин, С.А. Мишин // Охрана, безопасность, связь. – 2020. – № 5-3. – С. 240-244.
12. Алгебраические критерии устойчивости Рауса-Гурвица / А.В. Каневец, А.Г. Абрасимовская, А.Е. Анисимов [и др.] // Моделирование информационных систем и технологий: Материалы Международной научно-практической конференции. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, 2024. – С. 74-80.
13. Варин В.П. Спектральные методы решения дифференциальных и функциональных уравнений / В.П. Варин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024. – Т. 64. – № 5. – С. 713-728.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Преображенский Андрей Петрович**, доктор технических наук, профессор, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.

*e-mail:* [app@vvt.ru](mailto:app@vvt.ru)

**Фирсова Екатерина Александровна**, студентка, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.

*e-mail:* [Ekat\\_Firs\\_401@yandex.ru](mailto:Ekat_Firs_401@yandex.ru)

**Стукалова Виктория Сергеевна**, студентка, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.

*e-mail:* [Ctuk\\_hjp09@yandex.ru](mailto:Ctuk_hjp09@yandex.ru)

**Телегина Виктория Олеговна**, студентка, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.

*e-mail:* [VikTel412\\_u@yandex.ru](mailto:VikTel412_u@yandex.ru)

**Преображенский Юрий Петрович**, кандидат технических наук, доцент, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.

*e-mail:* [petrovich@vvt.ru](mailto:petrovich@vvt.ru)