Вестник Воронежского института высоких технологий / Bulletin of the Voronezh Institute of High Technologies | 2024;18(1) https://vestnikvivt.ru

УДК 517.9

Проблемы исследования характеристик механических колебаний

Т.В. Аветисян[1], Д.Н. Козлова[1], В.В. Шунулина[1], А.П. Преображенский[2]✉

[1]Колледж Воронежского института высоких технологий, Воронеж, Россия
[2]Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия

В статье проводится рассмотрение некоторых проблем, связанных с оценками характеристик механических колебаний. Обсуждаются условия возникновения колебаний. Рассматриваются возможности использования колебаний внутри технических систем. Проводится разработка математической модели для двойного маятника. Дано решение при заданных начальных условиях.

Ключевые слова: механические колебания, гармонический осциллятор, маятник.

The problems of studying the characteristics of mechanical vibrations

T.V. Avetisyan[1], D.N. Kozlova, V.V. Shunulina, A.P. Preobrazhenskiy[2]✉

[1]College of Voronezh Institute of High Technologies, Voronezh, Russia
[2]Voronezh Institute of High Technologies, Voronezh, Russia

The paper discusses some problems related to the evaluation of the characteristics of mechanical vibrations. The conditions for the occurrence of oscillations are discussed. The possibilities of using oscillations within technical systems are considered. A mathematical model for a double pendulum is being developed. A solution is given under the given initial conditions.

Keywords: mechanical oscillations, harmonic oscillator, pendulum.

Анализ показывает, что колебания являются достаточно распространенными в современном мире. Дадим пояснение по основным особенностям колебаний. Они рассматриваются в виде повторяющихся во времени некоторых движений. Может быть различная природа колебаний: колебания, относящиеся к электромеханике, механике, электромагнетизму и т. д. С точки зрения практических приложений в физике можно отметить роль электромагнитных и механических колебаний. Для того, чтобы получать соответствующую информацию относительно окружающего мира могут использоваться электромагнитные колебания, которые распространяются в пространстве, а также колебания по плотностям и давлениям в воздухе.

Следует отметить, что при том, что колебания могут характеризоваться разной физической природой, может быть использован одинаковый математический аппарат для их математического описания [1, 2]. Могут быть выделены такие виды для колебаний: не являющиеся периодическими, являющимися квазипериодическими, являющиеся периодическими.

В случае периодических колебаний происходит рассмотрение процессов, для которых происходит повторение во времени. При этом используется функция $f(t)=f(t+T)$ с учетом того, что T – является периодом в этом колебании, измеряется в секундах.

Для квазипериодических колебаний является характерным то, что при том, что они являются непериодическими, для длительного времени будет наблюдаться сохранение значений ключевых характеристик в процессах, при медленном изменении их параметров.

На практике можно встретиться с линейными колебаниями в тех случаях, когда уравнения, которые будут их описывать, являются линейными дифференциальными уравнениями. Если это интерпретировать с точки зрения физики, то тогда рассматривают те случаи, для которых внутри системы различные действующие силы могут анализироваться в виде линейных функций относительно координат и скоростей [3].

Когда внутри системы может появиться колебательный процесс? Например, происходит выведение системы из состояния устойчивого равновесия вследствие того, что будет действовать внешняя сила. Тогда происходит сообщение определенного количества кинетической или потенциальной энергии, происходит отключение внешних сил. Кинетическая энергия будет переходить в потенциальную и наоборот вследствие того, что внутри системы будет происходить работа внутренних сил.

Возникновение вынужденных колебаний будет происходить тогда, когда наблюдается воздействие внешней силы [4].

Предположим, что на основе гармонического закона происходит изменение физической величины x(t), например, это может быть координата, которая измеряется в метрах

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

Тогда колебания будут называться гармоническими. В колебаниях амплитуда будет A. Круговой частотой будет $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ с учетом того, что T является периодом. Начальной фазой в колебаниях является a_0 . В ходе решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = 0, \quad (2)$$

есть возможности для определения функции x(t) на основе решения этого уравнения свободных колебаний. Указанное уравнение описывает движение классического гармонического осциллятора. Он выводится из равновесия и предоставляется сам себе.

Маятники могут использоваться в различных механических устройствах, например, в часах [5].

Такая идея впервые была высказана учеными Галилеем и Гюйгенсом. Галилей предлагал применять часы для того, чтобы при движении морских судов осуществлять процессы, связанные с определением долготы места. Он даже несколько раз предлагал испанскому правительству на практике внедрить свое изобретение. Помимо этого, велись переговоры с Генеральными штатами Нидерландов. При этом была поддержка со стороны Константина Гюйгенса, который являлся отцом Христиана.

Ученый Вивиани построил соответствующие часы. Немного позже Х. Гюйгенсу удалось осуществить формирование часов. В них для маятника была обеспечена поддержка изохронности по колебаниям. Чтобы к механизму обеспечивать передачу движения был применен анкерный спуск. Для того, чтобы улучшить характеристики изохронности Х. Гюйгенсом на основе теоретических расчетов было продемонстрировано, что равномерность движений в маятнике будет достигаться, когда будет обеспечиваться независимость периода маятника от амплитуды в случае движения не по окружности, а по циклоиде.

Гюйгенсом были сформированы соответствующие ограничители по движению, которые размещались рядом с точкой подвеса маятника, которые позволяли обеспечить соответствующие характеристики движения. Математическую теорию эволют применяли для того, чтобы вести расчеты по формам ограничителей. В работах Гюйгенса происходило развитие исследований, которые проводили Галилей и Торричелли. Дальнейшие обобщения в разработках были проведены Ньютоном.

В различных технических устройствах могут использоваться нелинейные колебания. Для того, чтобы вести их описание, могут быть использованы нелинейные системы [6, 7], которые формируются на основе дифференциальных уравнений

$$x = A(t)x + \mu X(t, x, \mu) + f(t), \tag{3}$$

при этом учитывается, что $x \in R^n$, в X входят члены, которые не будут менее, чем 2-я степень с точки зрения компонент вектора x, f(t) является вектор-функцией времени t, $\mu > 0$ рассматривается в виде малого параметра (или $\mu = 1$ и X = X(t, x)).

Для многих технических систем является характерным проявление в них нелинейных эффектов. Принцип суперпозиции колебаний будет при этом нарушаться. В таких случаях будут другие результаты по каждому воздействию, если при этом будет присутствовать другое воздействие, при сравнении со случаем, в котором другое воздействие отсутствует [8].

Маятник рассматривается в виде системы, которая является подвешенной в поле тяжести. При этом она реализует процессы механических колебаний. Эти процессы происходят вследствие того, что воздействует сила тяжести, сила упругости и сила трения. При решении практических задач в ряде случаев трением исследователи пренебрегают.

В механических системах могут быть выделены конструкции, которые соответствуют двойному маятнику. В таких случаях один маятник будет подвешиваться к другому маятнику. Подобная система может рассматриваться как потенциально хаотическая. Каким образом это может быть интерпретировано?

При запуске системы, при небольшом изменении в начальных условиях, будет наблюдаться заметное влияние на параметры при дальнейшем движении маятника, с учетом того, что параметры находятся в некотором диапазоне. То есть хаотичное или случайное движение будет соответствовать тому, как будет вести себя двойной маятник.

Как было указано, должны быть использованы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом они решаются численным образом, поскольку аналитического решения нет. В таких случаях эффективным является применение компьютерного моделирования [9, 10].

Иллюстрация структуры двойного маятника дана на рисунке. То есть, к одному маятнику следует подвесить другой. В ходе моделирования будем считать, что стержень имеет весьма малую массу. Тогда есть возможность для того, чтобы обозначить такие уравнения движения:

$$\theta_1' = \omega_1; \tag{4}$$

$$\omega_1' = \frac{m_1 l_1 \omega_1^2 \sin\Delta\cos\Delta + m_2 g \sin\theta_2 \cos\Delta + m_2 l_2 \omega_2^2 g \sin\Delta - Mg\sin\theta_1}{Ml_1 - m_2 l_1 \cos^2\Delta}; \tag{5}$$

$$\theta_2' = \omega_2; \tag{6}$$

$$\omega_2' = \frac{-m_2 l_2 \omega_2^2 \sin\Delta\cos\Delta + M(g\sin\theta_1\cos\Delta - l_1\omega_1^2\sin\Delta - g\sin\theta_2)}{Ml_2 - m_2 l_2\cos^2\Delta}, \quad (7)$$

учитываем, что $\theta_{1,2}$ является углом, который показывает отклонение объекта относительно вертикального положения, рад;

$\omega_{1,2}$ – является угловым моментом объекта, кг · м^2/с;

$l_{1,2}$ – является длиной стержня, осуществляющего соединение, м;

$m_{1,2}$ – соответствует массе объекта, кг $\Delta = \theta_2 - \theta_1$;

$M = m_1 + m_2$;

g – является ускорением свободного падения, м/с^2.

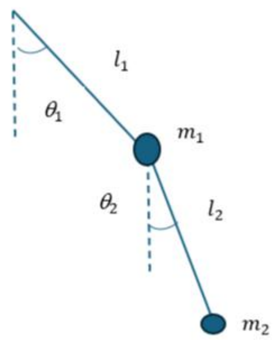

Рис. Иллюстрация структуры двойного маятника

Требуется осуществить решение представленных уравнений, чтобы осуществить процессы моделирования двойного маятника. Численные подходы применяются вследствие того, что нет аналитического решения. Для этого могут быть применены разные способы. Например, на практике можно реализовать метод Эйлера. В нем учитывается, что в ходе рассмотрения соответствующей функции y (t) имеем

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t, \quad (8)$$

в выражении промежуток времени Δt является малым;
y'(t) – является производной функции y(t) по временному параметру.

Тогда, ориентируясь на информацию по начальным условиям движения для y(0), есть возможности для определения y(t).

Метод Рунге-Кутты также может быть использован для того, чтобы решать обыкновенные дифференциальные уравнения. В нем есть некоторые преимущества.

Если в методе Эйлера ведется процесс вычисления производную лишь один раз для y(t), то в методе Рунге-Кутты осуществляется процесс вычисления производной неоднократно среди y(t) и y(t +Δt). Тогда предыдущая производная применяется как точка отсчета, после этого осуществляется усреднение. С точки зрения подхода, который достаточно часто привлекается исследователями на практике, можно отметить метод Рунге-Кутты, относящийся к четвертому порядку. В нем ведется процесс вычисления производной в совокупности четыре раза при шаге Δt.

Применение обобщенных координат и обобщенных скоростей достаточно часто рассматривают при решении задач в механике Лагранжа. В ходе рассмотрения нашего примера такими переменными мы считали углы, на которые отклонялись маятники a_1, a_2, а также угловые скорости a_1', a_2'.

Тогда можно представить нелинейную систему, которая содержит два дифференциальных уравнения Лагранжа на основе применяемых переменных:

$$(m_1+m_2)l_1a_1'' + m_2l_2a_2''\cos(a_1-a_2)+m_2l_2a_2'^2\sin(a_1-a_2)+ \\ +(m_1-m_2)g\sin a_1=0; \tag{9}$$

$$l_2a_2''+l_1a_1''\cos(a_1-a_2)-l_1a_1'^2\sin(a_1-a_2)+g\sin a_2=0. \tag{10}$$

Система уравнений первого порядка Гамильтона формируется на основе того, что происходит переход от нелинейной системы дифференциальных уравнений Лагранжа с привлечением преобразований Лежандра. В ходе решения соответствующих уравнений необходимо опираться на классический подход Рунге-Кутты с 4-м порядком точности.

Рассмотрим частный случай, в котором длины маятников предполагаются равными друг другу $l_1=l_2=1$. Помимо этого используем коэффициент η. Он равен: $\eta=\frac{m_2}{m_1}$. В таком случае можно сделать запись такой системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1' = \dfrac{p_1-p_2\cos(a_1-a_2)}{m_1l^2[1+\eta\sin^2(a_1-a_2]} \\ a_2' = \dfrac{p_2(1+\eta)-p_1\mu\cos(a_1-a_2)}{m_1l^2[1+\eta\sin^2(a_1-a_2]} \\ p_1' = -m(1-\eta)gl_1\sin a_1 - A_1 + A_2 \\ p_2' = -m_1\eta gl\sin a_2 + A_1 - A_2 \end{cases}, \tag{11}$$

при этом

$$A_1=\frac{p_1p_2\sin(a_1-a_2)}{m_1l^2[1+\eta\sin^2(a_1-a_2)]}; \tag{12}$$

$$A_2=\frac{[p_1^2\eta-2p_1p_2\eta\cos(a_1-a_2)+p_2^2(1+\eta)]\sin[2(a_1-a_2)]}{2m_1l^2[1+\eta\sin^2(a_1-a_2)]^2}. \tag{13}$$

На основе векторного представления можно записать такую систему:

$$Z'=f(Z), \tag{14}$$

при этом

$$Z=(a_1,a_2,p_1,p_2)^T; \tag{15}$$

$$f=(f_1,f_2,f_3,f_4)^T. \tag{16}$$

Формирование вектора Z осуществляется на базе того, что применяются четыре канонических переменных. В правые части дифференциальных уравнений входят составляющие вектора f.

Четыре промежуточных вектора будут вычисляться на основе метода Рунге-Кутты последовательным образом для каждого из шагов:

$$Y_1=\tau f(Z_n); \tag{17}$$

$$Y_2 = \tau f(Z_n + \frac{1}{2} Y_1); \tag{18}$$

$$Y_3 = \tau f(Z_n + \frac{1}{2} Y_2); \tag{19}$$

$$Y_4 = \tau f(Z_n + Y_3). \tag{20}$$

Чтобы определить значение вектора Zn + 1, которое соответствует следующему временному узлу, необходимо опираться на выражение:

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{1}{6}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4). \tag{21}$$

В таком алгоритме общая ошибка по конечному интервалу характеризуется порядком $O(\tau^4)$.

При заданных начальных условиях

$$t = 0, \varphi_{10} = \pi / 10, \dot{\varphi}_{10} = 0, \varphi_{20} = 0, \ \dot{\varphi}_{20} = 0 \ , \tag{22}$$

было получено следующее решение для колебаний маятника:

$$\begin{gathered} \varphi_1 = 0{,}1868\cos(k_1 t) + 0{,}1274\cos(k_2 t), \\ \varphi_2 = 0{,}2672\cos(k_1 t) - 0{,}2672\cos(k_2 t). \end{gathered} \tag{23}$$

Вывод. Таким образом, в работе проведен анализ основных особенностей колебаний в механических системах. Рассмотрены возможности применения колебаний в практических приложениях. Рассмотрен пример решения задачи для двойного маятника.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сулоева Е.С. Математическое и программное обеспечение для определения погрешности при моделировании средства измерения / Е.С. Сулоева, Н.В. Романцова // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4.
2. Казанцев А.М. Некоторые подходы к оценке процесса функционирования структурно-динамических систем мониторинга в условиях внешних воздействий / А.М. Казанцев, Р.А. Кочкаров, А.В. Тимошенко, А.А. Сычугов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2021. – Т. 9. – № 4.
3. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Рабинович М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
5. Львович Я.Е. Оптимизация проектирования многоаспектной цифровой среды системы однородных объектов на основе процедур декомпозиции и агрегации / Я.Е. Львович, А.В. Питолин, С.О. Сорокин // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 2.
6. Безгласный С.П. Ограниченное управление движениями двухмассового маятника / С.П. Безгласный, М.В. Краснов, А.А. Мухаметзянова // Труды МАИ. – 2015. – № 79.
7. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика и молекулярная физика / И.В. Савельев. – СПб: Лань, 2006. – 432 с.

8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
9. Локтионов А.В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скорость его движения / А.В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 26. – С. 138-143.
10. Зубов В.П. Галилей и борьба за новую систему мира / В.П. Зубов // Философский журнал. – 2009. – № 1 (2). – С. 88-110.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Аветисян Татьяна Владимировна, преподаватель, Колледж Воронежского института высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: vtatyana_avetisyan@mail.ru

Козлова Дарья Николаевна, студент, Колледж Воронежского института высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: kozl_darrya89@mail.ru

Шунулина Виктория Владимировна, студент, Колледж Воронежского института высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: shunul_vikt908@mail.ru

Преображенский Андрей Петрович, доктор технических наук, профессор, Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия.
e-mail: app@vivt.ru